भूमिका

अस्तीह गणित-गोलादिविविधविषयपूरितः श्रुतिपथप्रदर्शी ज्यौतिषसिद्धान्तो भारतेऽन्यत्र च सुप्रसिद्धः सर्वेषां सिद्धविद्यानां पुरतः। सोऽयं क्रमशः सुखबोधाय गणितलाघवादिमाश्रित्य लब्धात्माभ्युदय इदानीं वस्तुतोऽन्यान्यवेदाङ्गेषु शिथिलतां गतेष्वपि स्वचक्षुश्श्रारिताथ्यं विशेषतो भजत एव।

यतः स्थविरतां लभमानस्यापि तस्यावलोकनसामर्थ्यवर्धकं यथार्थं नेत्रावरणमिवाभिनवाव्यक्तगणितज्यामितिकात्रिकोणमित्यादि विषयजातम्। येन चिरसाध्यमपि तज्ज्ञानं त्वचिरसिद्धमिवेत्यवगम्य त्रयाणां कोणानां मितिरित्यत्रोपचारात् त्रयाणां कोणानां मितेर्ज्ञापिका कृतिरिति सरला प्रथमा प्रथमतो ज्यौतिषभूद्धरणधुरीणैः सर्वज्यौतिषिकशिरोमणिभिः प्रियसिद्धान्तशिरोमणिभिर्महामहोपाध्यायैः श्रीमद्भिः पण्डित-बापूदेवशास्त्रिभिरेव संकलय्य काश्यामेव 'मेडिकलहाल'—यन्त्रालयतः प्राकाशि।

तत्समय एव विद्यमानैः सुप्रसिद्धसिद्धविद्यैर्ज्यौतिषसिद्धान्ततत्त्वविवेकमर्मज्ञैर्मैथिलभूसुरैः श्रीमद्भिः पण्डितनीलाम्बरशर्मभिर्झोपाभिधैर्विरचितः सरलत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितचापीयत्रिकोणमित्यादिनानाज्यौतिषसिद्धान्तीयविषयवासना-त्रिकाशो 'गोलप्रकाशो' नाम ग्रन्थस्तैरेवोक्तशास्त्रिभिः स्वसंशोधकत्वेनादृतस्तस्मिन्नेव यन्त्रालये प्रकाशितश्च।

समयानुसारं सर्वत्र संस्कृतपरीक्षानियमे प्रस्तुते संप्रति विशेषतो रेखागणितत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितादिग्रन्थाः पिपठिषुभिः

सावधानतया ज्ञातुमभिलष्यन्ते तत्र बीजमेवाव्यक्तगणितं नव्यमव्यक्तमेव बहुधाऽतः प्रथमं तदव्यक्तमेव प्रकाश्यमिति मन्यमानोऽहमादौ सरलत्रिकोणमितिपुस्तकालाभात् श्रेष्ठिना बा. हरिदासगुप्तात्मजेन श्रीहरिकृष्णदासगुप्तेन स्वीकृततन्मुद्रणव्ययादिना शोधयितुं प्रवर्त्तितोऽभूवम् ।

यद्यपि सूर्यसिद्धान्तार्यभटसिद्धान्तपञ्चसिद्धान्तिकाब्रह्मस्फुटासिद्धान्तादिष्वपि जीवाकोटिज्योत्क्रमज्यातो धनर्णतत्तज्जनितसंस्काराद्यवलोकनेन रेखागणितज्ञानमिवास्यापि ज्ञानं प्राचीनसमयादेवास्त्येवाऽथोऽपि पाश्चात्यगणितवित्संकलितां नानाभिनवगणितवैचित्र्यचित्रितां बृहतीं तामेव सर्वां संकलय्य प्रकाशयितुमुत्कण्ठितोऽपि गुरुजनकृतिसमुद्धरणव्रतलिप्सयाऽन्तरायित एतामेव सरलात्रिकोणमितिं संशोधयितुमारभेयम् ।

अत्र चत्वारोऽध्यायाः प्रक्रमपदवाच्याः सिद्धान्तनिययाश्च सन्ति यत्र स्थानविशेषे ब्रह्मगुप्त-भास्कराचार्यादीनां ज्याकोटिज्यावृत्तान्तत्रिभुजचतुर्भुजफलवृत्तफलादिसाधननियामकाः श्लोका उपपद्यन्ते तत्र२ ते२ श्लोकाश्च प्रतिपदोक्ता वर्त्तन्ते मध्येऽभ्यासार्थं कतिपयाः प्रश्ना विशेषतश्चतुर्थाध्याये प्रघातमापकसंकेतेन कोणज्यादिमानसाधनं वेधतः स्थानान्तरितवृक्षपर्वतोच्छ्रितिनदीविस्तारादिज्ञापका ग्रन्थान्ते विंशतिः प्रश्नाश्च सुरक्षिताः ।

अत्र बहुत्र स्थलेषु यत्र२ जीवादिस्वरूपमात्रप्रदर्शनादेव प्रक्रमाङ्कास्तत्र २ मया वाक्यतो बृहदक्षरैर्ज्ञापिताः । यत्र चास्मद्गुरुवराणां ज्यौतिषभास्कराणां गणिताद्वितीयानां महामहोपाध्यायपण्डितश्रीमत्सुधाकरद्विवेदिनां द्वित्रं पद्यमुपपद्यते तत्र २ टिप्पण्यां तदप्याद्दतं तथाऽभ्यासार्थं ग्रन्थमध्यस्थप्रश्नानामुत्तराणि च सुलभं दर्शितानि । चतुर्थाध्यायस्थप्रघातमापकगणितावबोधकं नवीनगणितमप्यावश्यक-

त्वेन तत्र चतुर्थाध्यायात् प्रागेव निःक्षिप्तं तथा ग्रन्थान्ते रक्षितानां विंशतेः प्रश्नानां सोपपत्तिकं कलासारण्यनुसारगणितप्रदर्शन-(लागूरथ्म = Logarithm) लघुरिक्थगणितपूर्वकमुत्तरं चान्ते निवेश्य सर्वान्ते कतिचन प्रश्नाश्चान्येऽभ्यासार्थं धृताः सन्ति । एवं यथाबुद्धिविभवं संशोध्यापि "भ्रान्तिर्मनुष्यधर्मः"-इति नराभिमानाज्ञानादक्षिचापल्यदोषतोऽवश्यं त्रुटिभागद्दमभीक्ष्णं शुद्धान्तःकरणान् गणितसिद्धान्तविदुषो मुहुः प्रार्थये ।

श्रीमुरलीधरझा मैथिलः ।

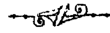


पुस्तकप्राप्तिस्थानम्



श्रीहरिकृष्णदास,
मालिक, "गुप्तबुकडीपो"
'कचौरीगली' बनारस सिटी ।

शुद्धिपत्रम् ।



अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे	पंक्तिः
मिष्टस्याने	मिष्टस्थाने	५	१४
बमा ÷ कब	कमा ÷ कब	११	४
$\left(\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	$\left(\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	१२	१३
—कोज्याक·ज्याक	—कोज्याअ·ज्याक	१८	१
कोज्या(अ − क)	कोज्या$\frac{1}{2}$(अ − क)	२१	१२
२कोज्या(अ + क)·ज्याअ-(अ − क)	२कोज्या$\frac{1}{2}$(अ + क)·ज्या$\frac{1}{2}$-(अ − क)	२१	१३
त्रि^{2} $\overline{+}$	त्रि^{2} +	२५	१
$\sqrt{\frac{\sqrt{१०}+२\sqrt{५}}{४}}$	$\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}$	३४	३
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५}+१}{४\sqrt{२}}$	३५	५
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५}+१}{४\sqrt{२}}$	३५	६
प्रकमस्य	प्रक्रमस्य	३९	२०
$\frac{\text{२स(स − अ)}}{\text{२कग}}$	$\frac{\text{२स(स − अ)}}{\text{कग}}$	४३	८
$\frac{\text{२(स − क)(स − ग)}}{\text{२कग}}$	$\frac{\text{२(स − क)(स − ग)}}{\text{कग}}$	४३	१०
व्यासाधयो-	व्यासार्धयो-	४८	१६
आ^2 + घ^2	अ^2 + घ^2	४९	१२
कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$गा	कग·ज्या^{2} $\frac{1}{2}$गा	५३	१

अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे	पंक्ति
२ज्या२अ	ज्या२अ	५३	१७
संख्याकर्त्तु-	संख्याकर्ज-	५५	११
ज्या$\frac{१८०°}{न}$, कोज्या$\frac{१८०°}{न}$	ज्या$\frac{१८०°}{न}$ × कोज्या$\frac{१८०°}{न}$	५८	११
ज्या^{२}अ + ज्या^{२}अ	कोज्या^{२}अ + ज्या^{२}अ	७५	११
ज्या९०° + अ)	ज्या(९०° + अ)	८५	२३
$\frac{१}{३}$इदं धनमूलज्ञापकम्	$\frac{१}{३}$इदं धनमूलज्ञापकम्	८८	१६
लघु१२$\frac{१}{५}$	लघु १२$^{\frac{१}{५}}$	९०	४
लघु१ =l, ०'१, ००'१	लघु१ = ०, ·०१, ·००१	९१	१०
१० + अघा$_द$अ	१० + प्रघा$_द$अ	९७	१७
कामनं	कामानं	१०२	८
− प्रघा$_द$ज्याका	− प्रघा$_द$कोज्याका	११६	१८
अघ^२ − अघ^२	अच^२ − अघ^२	११८	६
मसंभावं	मसंभवं	१२०	१५



अथ

त्रिकोणमितिः ।

तत्र

प्रथमोऽध्यायः ।



नत्वेभास्यं वक्ष्ये त्रिकोणमितिनामकं गणिततन्त्रम् ।
यदवगमाद्भूखस्थं वस्तु स्याद्गणयितुं सुशकम् ॥ १ ॥

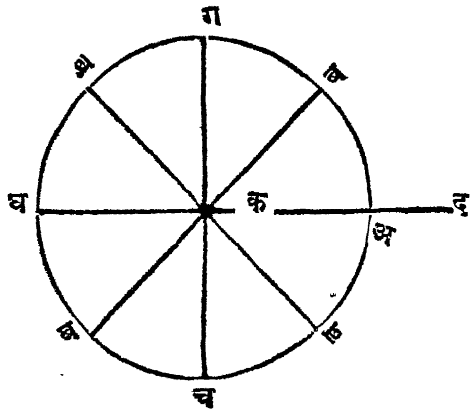
परिभाषाः ।

१ प्रक्रमः । त्रिकोणस्य त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति षडवयवा * भवन्ति । तेषामवयवानामवगमकं तन्त्रं त्रिकोणमितिसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणगुणानां सम्यग्ज्ञाने कोणानां भुजैः साकं यः सम्बन्धस्तस्य भुजानां च सम्यग्ज्ञानादत्र कोणगुणा मुख्यत्वेन वर्ण्यन्ते ।

२ । संयुक्तैकप्रान्तयो रेखयोरन्योन्यप्रावण्यं क्षेत्रमितौ कोणशब्देन व्यवह्रियते किन्त्विह त्रिकोणमितौ संयुक्तैकप्रान्तयो रेखयोः संयुक्ताग्रे मिथो दृढं बद्ध्वा पूर्वमेकां रेखामपरस्यां निधाय तस्यां निहितरेखायामेकस्मिन्नेव भूतले भ्रमितायां तद्रेखया यावान् प्रदेशोऽतिक्रम्यते तावान् कोणसंज्ञः स्यात् ।

---

* त्रिभुजस्य फलमपीति सप्तावयवैर्भवितव्यम् ।



यथाऽत्र किल कद आधाररेखा। क रेखयोः संयोगविन्दुः। तथा कोणोत्पत्त्यै पूर्वं या रेखा कद-रेखायां निधाय एकस्मिन्नेव भूतले भ्राम्यते सा कब। तदाऽस्या रेखाया भ्रमणेन संजात अकब-कोणस्त्रैकोणमितिक उच्यते। क्षेत्रमितिसम्बन्धी कोणः समकोणद्वयादधिको न भवति परन्तु त्रिकोणमितिसम्बन्धी ततोऽप्यधिको यथेष्टं महान् जायते। अथ यदि क-केन्द्रमभितः कअ इष्टव्यासार्धेनैकम् अगघच वृत्तं क्रियते तदा अकब-कोणसंमुखश्चापः क्षेत्रमितावर्धपरिधेरधिको न भवति किन्त्वत्र स चापः परिधेरप्यधिको यथेष्टं भवितुमर्हति।

२। क-बिन्दौ यथायथा अकब-कोणो वर्धते तथातथा तत्संमुखचापो वर्धते। अतः प्रतिसमकोणसंमुखचापः परिधिचतुर्थांशो भवति। अयमेव पदसंज्ञः।

यथोर्ध्वक्षेत्रे अघ-व्यासे क-केन्द्रे गच-लम्बकरणेन संजातानां चतुर्णां समकोणानां संमुखाः क्रमेण अग, गघ, घच, चअ चापाः पदाख्याः स्युः। अत एवैकस्मिन् पदे समकोणे च समाना एव नवतितुल्या भागा अंशसंज्ञाः कल्प्यन्ते। तथोभयत्रैकैकस्मिन्नंशे षष्टिस्तुल्यभागाः कलासंज्ञाः कल्प्यन्ते। एकैकस्यां कलायां च षष्टिरेव तुल्यभागा विकलाख्याः कल्प्यन्ते। अथैतेषामंशकलाविकलासंज्ञकभागानां मानसंख्याद्योतनाय तत्तत्संख्याङ्कोपरि दक्षिणभागे क्रमेण °, ′, ″ एतानि चिह्नानि लिख्यन्ते। यथा पञ्चविंशतिरंशाश्चत्वारिंशत् कलाः षट्पञ्चाशद्विकलाश्चैतेषां द्योतनाय २५°, ४०′, ५६″ एवं लिख्यन्ते।

४ । यदि केनचित् कोणेन तत्संमुखचापो लभ्यते तदाऽन्येन कोणेन किमित्यनुपातेन तत्संमुखचापो लभ्यत इति क्षेत्रमितौ षष्ठाध्याये त्रयस्त्रिंशी प्रतिज्ञोपपादिताऽस्ति तयेदमवगम्यते ।

(१) कोणतत्संमुखचापयोरंशादिसंख्या समैव भवति ।

(२) निर्दिष्टचापदैर्घ्यात् तच्चापसंमुखकेन्द्रलग्नकोणस्यांशादि मानमवगन्तुं शक्यत इति ।

५ । (२ प्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम्) कद-आधाररेखामारभ्य कब-रेखाया भ्रमणेन संजातः अकब-कोणो यदा समकोणान्न्यूनो भवति तदा स आद्यसमकोणीय उच्यते तत्संमुखचापश्चाद्यपदीयः । यदा स कोण एकसमकोणादधिकः समकोणद्वयान्न्यूनस्तदा स द्वितीयसमकोणीय उच्यते तत्संमुखचापश्च द्वितीयपदीयः । एवमग्रेऽपि ।

६ । कद–आधाररेखातः कब–रेखा यथायथाऽनुलोमं भ्रमति तथातथा अकब-कोणो वर्धतेऽतः सा यथायथा विलोमं भ्रमेत् तथातथा स कोणो ह्रासमियादिति तु स्पष्टतरम् । अत एव चतुर्थसमकोणान्तःपाती अकब-कोण ऋणं भवति । कब-रेखाया विलोमभ्रमेण तत्कोणोत्पत्तेः । अत एव तत्कोणसंमुखः अब-चापोऽपि ऋणं भवति ।

७ । यस्मात् कस्माच्चिदपि चापात् कोणाद्वा पदं समकोणो वा यावदतिरिच्यते तावती तच्चापस्य कोणस्य वा कोटिः स्यात् ।

यथा-(२ प्र०क्षे०द्र०) अब-चापस्य अकब-कोणस्य वा बग-चापः

बकग-कोणो वा कोटिः स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने नवतेः शोधिते तयोः कोटिमानमवशिष्यते । यथा–२३°, १५′, ४५″ । अस्य कोटिः ६६°, ४४′, १५″ ।

अनु० (१) नवत्यधिकस्य चापस्य कोणस्य वा कोटी ऋणं भवति ।

अनु० (२) जात्यत्र्यस्रे लघुकोणयोर्योगस्य नवतितुल्यत्वात् तयोरेकोऽपरस्य कोटिर्भवति ।

८ । यस्मात् कस्माच्चिच्चापात् कोणाद्वा परिध्यर्धं समकोणद्वयं वा यावताऽधिकं तावत् तच्चापस्य कोणस्य वा स्पर्धिसंज्ञं स्यात् ।

यथा–(२ प्र. क्षे. द्र.) अब-चापस्य अकब-कोणस्य वा बघ-चापः बकब-कोणो वा स्पर्धी स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने साशीतिशताच्छोधिते तयोः स्पर्धिचापकोणाववशिष्येते ।

यथा–५५°, ३५′, ४०″ । अस्य स्पर्धी=१२४°, २४′, २०″ ।

अनु० (१) साशीतिशताधिकस्य चापस्य कोणस्य वा स्पर्धी ऋणं भवति ।

अनु० (२) त्र्यस्रमात्रे कोणत्रययोगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् त्र्यस्रे एककोणस्यापरकोणद्वययोगः स्पर्धी भवति ।

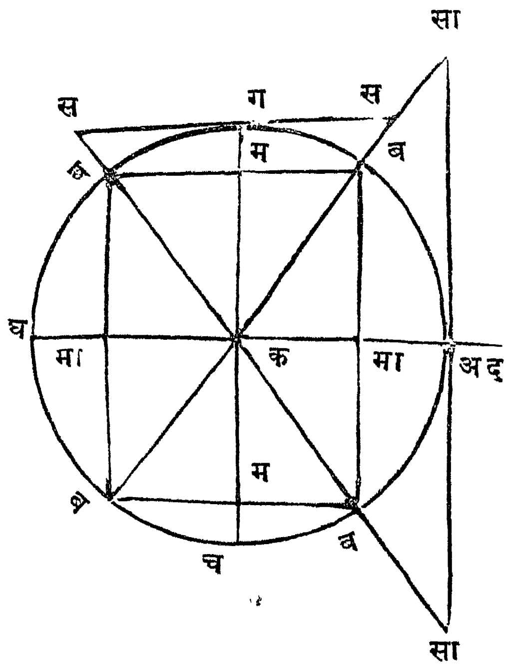
९ । अथ चापकोणयोः सम्बन्धिनः कतिचन पदार्थाः कथ्यन्ते । तत्र चापसम्बन्धिनः पदार्थाश्चापीया उच्यन्ते कोणसम्बन्धिनश्च कोणीयाः ।

जीवादिपरिभाषाः ।

(१) चापस्यैकप्रान्ताद्व्यासं कृत्वा द्वितीयप्रान्तात् तद्व्यासोपरि कृतो लम्बस्तच्चापस्य ज्या स्यात् ।

यथा-कल्प्य० कद्-आधाररेखा । यस्या मूलं क-बिन्दुः । तं केन्द्रं

कृत्वा कअ-इष्टव्यासार्धेन अगघच वृत्तं कार्यम् । अघ गच व्यासौ च-मिथो लम्बरूपौ विधेयौ । तदा यदि अब इष्टचापः स्यात् यस्य एकमग्रं अ-बिन्दौ द्वितीयं च चतुर्णां पदानामन्यतमस्यान्तर्गतं स्यात् तदा तस्य ज्या बमा भवेत् ।



(२) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्याने बिन्दुं कृत्वा तस्मादपरस्यां कृताल्लम्बात् कोणेष्टबिन्द्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य ज्या स्यात् ।

यथा—अकब–कोणोत्पादकयोः कद्-कसा-रेखयोः कद्-रेखायां कसा-रेखायाः ब-बिन्दोर्यदि बमा-लम्बः क्रियते तदा अकब-काणस्य

ज्या $=\dfrac{\text{बमा}}{\text{कब}}$ स्यात् । यदि सा-बिन्दोः साअ-लम्बः क्रियते तदा अकब-

कोणस्य ज्या $=\dfrac{\text{साअ}}{\text{कसा}}$ स्यात् इयं पूर्वतुल्यैव ।

(३) चापस्यैकप्रान्तात् कृते व्यासे यो लम्बरूपोऽन्यो व्यासस्तस्मिन् चापापरप्रान्तात् कृतो लम्बस्तच्चापस्य कोटिज्या स्यात् । तच्चापस्य या कोटिस्तस्या ज्येत्यर्थः । इयं ज्यामूलस्य केन्द्रस्य चान्तरेण तुल्या भवति ।

यथा—अब-चापस्य बम कमा च कोटिज्या ।

(४) कोणोत्पादकरेखयोः कस्यां चिदेकतरस्यां स्थिता-दिष्टबिन्दोरपरस्यां कृतस्य लम्बस्य कोणबिन्दोश्चान्तरात् कोणेष्टबिन्द्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य कोटिज्या स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य कोटिज्या $= \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$ स्यात् ।

(५) चापस्यैकं प्रान्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रापरप्रान्तलग्न-रेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

(६) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्थाने बिन्दुं प्रकल्प्य तस्मादपरस्यां कृताल्लम्बाल्लम्बमूलकोणबिन्द्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य स्पर्शरेखा $= \frac{\text{बमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$ स्यात् ।

(७) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्ताद्वृत्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रचापापरप्रान्तलग्नरेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अब-चापस्य गस कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

(८) कोणस्य स्पर्शरेखाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—पूर्वसिद्धा अकब-कोणस्य स्पर्शरेखा $= \frac{\text{बमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$ ।

$\therefore$ अकब-कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा $= \frac{\text{कमा}}{\text{बमा}} = \frac{\text{अक}}{\text{असा}}$ ।

(९) चापस्यैकप्रान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः

केन्द्रान्निर्गता चापापरप्रान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य छेदनरेखा स्यात्।

यथा—अब-चापस्य कसा छेदनरेखा।

(१०) कोणस्य कोटिज्याया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य छेदनरेखा स्यात्।

यथा—अकब-कोणस्य कोटिज्या $= \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$।

$\therefore$ छेदनरेखा $= \frac{\text{कब}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{कअ}}$।

(११) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः केन्द्रान्निर्गता चापापरप्रान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात्।

यथा—अब-चापस्य कस कोटिच्छेदनरेखा।

(१२) कोणस्य जीवाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् तत्कोणस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात्।

यथा—अकब-कोणस्य ज्या $= \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$।

$\therefore$ कोटिच्छेदनरेखा $= \frac{\text{कब}}{\text{बमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{असा}}$।

(१३) चापजीवामूलयोर्मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चाप-स्योत्क्रमज्या स्यात्।

यथा—अब-चापस्य अमा उत्क्रमज्या स्यात्।

(१४) कोणस्य कोटिज्ययोनं रूपं तत्कोणस्योत्क्रमज्या स्यात्।

यथा—अकब-कोणस्य कोटिज्या $= \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$ ।

$\therefore$ उत्क्रमज्या $= १ - \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = १ - \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$ ।

(१५) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तस्य कोटिमूलस्य च मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चापस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् । यथा अब-चापस्य गम-कोट्युत्क्रमज्या ।

(१६) कोणस्य जीवया हीनं रूपं तत्कोणस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य ज्या $= \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$ ।

$\therefore$ कोट्युत्क्रमज्या $= १ - \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = १ - \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$ ।

१० । यदि (अ) इदं कस्यचिच्चापस्य कोणस्य वा द्योतकं स्यात् तदाऽस्य ज्यादयः क्रमेणैवं लिख्यन्ते । ज्याअ, कोज्याअ, स्पअ, कोस्पअ, छेअ, कोछेअ, उअ, कोउअ । अत एव ज्याअ अस्य वर्गः $=$ (ज्याअ)^{२} । कोज्याअ अस्य घनः $=$ (कोज्याअ)^{३} इत्यादि स्यात् । परमत्र प्रायो लाघवार्थं ज्या^{२}अ, कोज्या^{३}अ इत्यादि, एवमेव लिख्यते । यद्यपि ज्या^{२}अ इत्यादीनां स्थानविशेषेऽर्थोऽन्यथा कल्प्यते ।

११ । चापीयाः कोणीया वा जीवादयः पदविशेषे समकोणविशेषे वा ऋणत्वं प्राप्नुवन्ति । यथा–(९ प्र. क्षे. द्रष्टव्यम्) अब-चापस्य बमा ज्या प्रथमद्वितीयपदयोर्धनगताऽस्ति किन्तु तृतीयचतुर्थपदयोर्दिग्वैपरीत्यादृणगता भवति । एवं अकब-

कोणस्यापि ज्या प्रथमद्वितीयसमकोणयोर्धनगता किन्तु तृतीयचतुर्थयोर्लम्बस्य दिग्वैपरीत्यादृणगता भवति ।

एवं प्रतिपदं प्रतिसमकोणं वा जीवादीनां प्रत्येकं धनर्णत्वं निश्चित्य तदवगमायेदं चक्रं लिख्यते ।

चापीयाः कोणीया वा पदार्थाः	पदाङ्काः समकोणाङ्का वा १	२	३	४
ज्या	+	+	−	−
कोटिज्या	+	−	−	+
स्पर्शरेखा	+	−	+	−
कोटिस्पर्शरेखा	+	−	+	−
छेदनरेखा	+	−	−	+
कोटिच्छेदनरेखा	+	+	−	−
उत्क्रमज्या	+	+	+	+
कोट्युत्क्रमज्या	+	+	+	+

क्षेत्रे छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्दिगानुलोम्यप्रातिलोम्ये न सम्यगुपलक्ष्येते अतस्तयोर्धनर्णत्वावगमायान्यथा यत्यते ।

$$\because \text{कब} : \text{कमा} :: \text{कसा} : \text{कअ} \therefore \text{कसा} = \frac{\text{कब}\times\text{कअ}}{\text{कमा}} ।$$

अत्र यदि अब-चापस्य द्योतकं अ स्यात् ।

$$\text{तदा छेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{एवं कोछेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्याअ}} ।$$

एवं यदि अकब-कोणस्य द्योतकं अ स्यात् । तदा—

$$\text{छेअ} = \frac{\text{बक}}{\text{कमा}} = \frac{1}{\frac{\text{कमा}}{\text{कब}}} = \frac{1}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कब}}{\text{बमा}} = \frac{1}{\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}} = \frac{1}{\text{ज्याअ}} ।$$

एतेन चापस्य कोणस्य वा छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्धनर्णत्वं क्रमेण कोटिज्याज्ययोरिव भवतीति स्फुटमवगम्यते ।

१२। प्रतिसमकोणादि कोणीयज्यादीनां मानं प्रतिपदादि चापीयज्यादीनां मानं वा नवमप्रक्रमस्थक्षेत्रदर्शनेन शीघ्रमवगम्यते ।

बालावबोधाय तद्विलिख्य प्रदर्श्यते ।

कोणीयाश्चापीया वा ज्यादयः	अ वा ०°	ग ९०°	घ १८०°	ध्व २७०°
ज्या	०	१	०	−१
कोटिज्या	१	०	−१	०
स्पर्शरेखा	०	∞	०	∞
कोटिस्पर्शरेखा	∞	०	∞	०
छेदनरेखा	१	∞	−१	∞
कोटिच्छेदनरेखा	∞	१	∞	−१
उत्क्रमज्या	०	१	२	१
कोट्युत्क्रमज्या	१	०	१	२

अत्र कब-त्रिज्यां रूपं प्रकल्प्य चापीयज्यादीनां मानं लिखितमस्तीति बोध्यम् ।

१३। अथ नवमप्रक्रमोक्तसंज्ञानां सम्यग्ज्ञानाय कोणीयज्यादीनां कतिचन मिथः सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते ।

(९ प्र-क्षेत्रदर्शनम्) कल्प्यते अ=∠अकब तदा—

(१) $\text{ज्याअ} = \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{बमा}\div\text{बमा}}{\text{कब}\div\text{बमा}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}}$ ।

(२) $कोज्याअ = \frac{कमा}{कब} = \frac{कमा \div कमा}{कब \div कमा} = \frac{१}{छेअ}$ ।

(३) $स्पअ = \frac{बमा}{कमा} = \frac{बमा \div कब}{कमा \div कब} = \frac{ज्याअ}{कोज्याअ} = \frac{१}{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{१}{कोस्पअ}$

(४) $कोस्पअ = \frac{कमा}{बमा} = \frac{कमा \div कब}{बमा \div कब} = \frac{कोज्याअ}{ज्याअ} = \frac{१}{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ}} = \frac{१}{स्पअ}$ ।

(५) $छेअ = \frac{कब}{कमा} = \frac{कब \div कब}{बमा \div कब} = \frac{१}{कोज्याअ}$ ।

(६) $कोछेअ = \frac{कब}{बमा} = \frac{कब \div कब}{बमा \div कब} = \frac{१}{ज्याअ}$ ।

(७) $उअ = १ - कोज्याअ = १ - \frac{१}{छेअ}$ ।

(८) $कोउअ = १ - ज्याअ = १ - \frac{१}{कोछेअ}$ ।

(९) $ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = \left(\frac{बमा}{कब}\right)^{२} + \left(\frac{कमा}{कब}\right)^{२}$

$$= \frac{बमा^{२} + कमा^{२}}{कब^{२}} = \frac{कब^{२}}{कब^{२}} = १ ।$$

$\therefore ज्या^{२}अ = १ - कोज्या^{२}अ$ । $कोज्या^{२}अ = १ - ज्या^{२}अ$ ।

१४ । अथ कोणीयज्यादीनां क्रमेण चापीयज्यादिभिर्यः संबन्धः स प्रदर्श्यते ।

यदि अ-कोणस्य संमुखचापः आ स्यात् तदा (९ प्र. क्षे. द्र.)।

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \text{ज्याअ} \therefore \text{ज्याआ} = \text{त्रि. ज्याअ}$$ ।

तत्र यदि त्रि = १ तदा ज्याआ = ज्याअ। एवं कोटिज्यादिष्वपि।

अनेनेदमवगम्यते । कोणीयजीवादयो रूपव्यासार्धे चापीया भवन्ति। एवमिष्टव्यासार्धेन गुणितास्ता इष्टव्यासार्धे चापीया भवन्ति। एवं गुणविपर्ययेण चापीयाभ्यः कोणीया भवन्तीति।

१५। (अनु०) यदि कस्मिँश्चित् त्रैकोणमितिके राशौ समीकरणे वा स्थिताः कोणीया जीवादय इष्टव्यासार्धे चापीयत्वेनापेक्षितास्तदा तासु कोणीयज्यादिषु इष्टव्यासार्धमिते त्रिहरे कल्पिते ताश्चापीया भवन्ति।

यथा—$\text{ज्या}^{2}\text{अ} + \text{कोज्या}^{2}\text{अ} = १$ अत्रत्यज्याकोटिज्ययोः क्रमेण

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}}, \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}}$$ आभ्यामुत्थापितयोः

$$\left(\frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}}\right)^{2} = १,$$ एवं सिद्ध्यति।

$\therefore \text{ज्या}^{2}\text{आ} + \text{कोज्याआ}^{2} = \text{त्रि}^{2}$ । एवमत्र ज्याकोटिज्ये चापीये सिद्धे।

अध्यायः २

अत्र कोणानां योगान्तरज्यादिसाधनं ज्यादिसंबन्धियोगान्तरवधफलानां मानानि चार्धांशज्याकोटिज्यानयनं ज्यादीनां मानानां वैचित्र्यं निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारश्चेति प्रोच्यते।

१६ । अथ द्वयोः कोणयोर्ज्याभ्यां कोटिज्याभ्यां च तत्कोणद्वयैक्यान्तरज्याकोटिज्यासाधनम् ।

अत्र किल तकद बृहत्कोणः = अ । दकध लघुकोणः = क । अनयोर्द्वयोरपि कोणबिन्दुः क एव, तदा ∠ तकध = अ + क । एवं कध-रेखायां क्वापि घ-बिन्दुः कार्यः । कद-रेखायां घट-लम्बः कार्यः । स च अ-पर्यन्तं तथा वर्धनीयो यथा टअ = घट स्यात् । कअ-रेखा थ-पर्यन्तं कार्या तदा कअ = कघ । अथ च ∠ थकद = क भवेत् ।

∴ ∠ तकथ = अ – क स्यात् । एवं कद-रेखातः कघ-तुल्या कब-रेखा पृथक् कार्या । कत-रेखायां घ, ट, ब, अ बिन्दुभ्यः क्रमेण घङ, टन, बम, अग लम्बाः कार्याः । अ, ट बिन्दुभ्यां च क्रमेण टन, घङ, रेखयोः अज, टच लम्बौ कार्यौ तदा घचट, टजअ त्रिभुजे सर्वांशैस्तुल्ये भवतः ।

$\therefore$ घच = टज, चट = जअ । एते त्रिभुजे, कटन, कबम त्रिभुजे चैतानि मिथः सजातीयानि भवन्ति ।

एवं, $\text{ज्याअ} = \frac{\text{बम}}{\text{कब}}$ । $\text{ज्याक} = \frac{\text{घट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{घट}}{\text{कब}}$ ।

$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{कम}}{\text{कब}}$ । $\text{कोज्याक} = \frac{\text{कट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{कट}}{\text{कब}}$ ।

तथा । $\text{ज्या}\ (\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{घड}}{\text{कघ}} = \frac{\text{घड}}{\text{कब}}$ । $\text{ज्या}\ (\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{अग}}{\text{कअ}} = \frac{\text{अग}}{\text{कब}}$ ।

$\text{कोज्या}\ (\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{कड}}{\text{कघ}} = \frac{\text{कड}}{\text{कब}}$ । $\text{कोज्या}\ (\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{कग}}{\text{कअ}} = \frac{\text{कग}}{\text{कब}}$ ।

एवं, घड = चड + घच = टन + घच ।

अग = टन − टज = टन − घच ।

कड = कन − डन = कन − चट ।

कग = कन + नग = कन + अज = कन + चट ।

तत्त्रिभुजसाजात्यात्, $\frac{\text{टन}}{\text{कट}} = \frac{\text{बम}}{\text{कब}} = \frac{\text{चट}}{\text{घट}}$ ।

$\text{टन} = \frac{\text{बम} \cdot \text{कट}}{\text{कब}}$ । $\text{चट} = \frac{\text{बम} \cdot \text{घट}}{\text{कब}}$ ।

$\frac{\text{घच}}{\text{घट}} = \frac{\text{कम}}{\text{कब}} = \frac{\text{कन}}{\text{कट}}$ $\therefore \text{घच} = \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कब}}$ । तथा, $\text{कन} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कब}}$ ।

तथा च, $\text{घड} = \frac{\text{बम} \cdot \text{कट}}{\text{कब}} + \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कब}}$ $\therefore \frac{\text{घड}}{\text{कब}} = \frac{\text{बम}}{\text{कब}} \cdot \frac{\text{कट}}{\text{कब}} + \frac{\text{कम}}{\text{कब}} \cdot \frac{\text{घट}}{\text{कब}}$

$$अग=\frac{बम.कट}{कब}-\frac{कम.घट}{कब} \therefore \frac{अग}{कब}=\frac{बम}{कब}.\frac{कट}{कब}-\frac{कम}{कब}.\frac{घट}{कब} ।$$

$$कड=\frac{कम.कट}{कब}-\frac{बम.घट}{कब} \therefore \frac{कड}{कब}=\frac{कम}{कब}.\frac{कट}{कब}-\frac{बम}{कब}.\frac{घट}{कब} ।$$

$$कग=\frac{कम.कट}{कब}+\frac{बम.घट}{कब} \therefore \frac{कग}{कब}=\frac{कम}{कब}.\frac{कट}{कब}+\frac{बम}{कब}.\frac{घट}{कब} ।$$

∴ ज्या (अ + क)=ज्याअ . कोज्याक+कोज्याअ . ज्याक । (१)

ज्या (अ − क)=ज्याअ . कोज्याक−कोज्याअ . ज्याक । (२)

कोज्या (अ + क)=कोज्याअ . कोज्याक−ज्याअ . ज्याक । (३)

कोज्या (अ − क)=कोज्याअ . कोज्याक+ज्याअ . ज्याक । (४)

एतदानयनं क-कोणं अ-कोणाल्लघुं प्रकल्प्य (अ + क) कोणं च समकोणान्न्यूनं प्रकल्प्य कृतं किन्तु क-कोणस्य अ-कोणादधिकत्वे (अ + क) कोणस्य च समकोणादधिकत्वे चौक्तरीत्या कोणैक्यान्तरज्याकोटिज्ये पूर्वसाधिते एव सम्पद्यते ।

१७ । अनु० । अनन्तरप्रक्रमस्थ—(२,४) समीकरणयोः यदि अ-कोणः शून्यं कल्प्येत तदा—

ज्या (− क)= − ज्याक । कोज्या (− क) = कोज्याक ।

अनेनेदमवगम्यते । ऋणगतकोणस्य ज्या ऋणं भवति कोटिज्या च धनं भवतीति ।

$$अत एव स्प (-क) = \frac{ज्या (-क)}{कोज्या (-क)} = \frac{-ज्याक}{कोज्याक} = - स्पक ।$$

एवमेव कोस्प (−क) = −कोस्पक । छे (− क) = छेक ।

कोछे (−क) = − कोछेक । उ (−क)= उक ।

कोउ (−क) = २ − कोउक ।

१८। अनु०। यदि १६ प्रक्रमे (२,४) अनयोरेव अ = १८०° स्युः। तदा–

ज्या (१८०°–क) = ज्या १८०° × कोज्याक – कोज्या १८०° × ज्याक।
(१२ प्र०) = ० × कोज्याक + १ × ज्याक = ज्याक।

कोज्या (१८०°–क)=कोज्या १८०°×कोज्याक+ज्या १८०°×ज्याक
= – १ × कोज्याक + ज्या० × ज्याक = – कोज्याक।

अनेनेदमवगम्यते। कोणस्य ज्या तद्धीनसमकोणद्वयस्य ज्यया तुल्या भवति। कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्या च तत्कोणकोटिज्यया ऋणगतया तुल्या भवतीति।

अत एव स्प (१८०°–क) $= \frac{\text{ज्या}(१८०°-\text{क})}{\text{कोज्या}(१८०°-\text{क})} = \frac{\text{ज्याक}}{-\text{कोज्याक}} =$ –स्पक।

एवमेव कोस्प (१८०°–क)=–कोस्पक। छे (१८०°–क)=–छेक।

एवं ∵ ज्या (अ+क) = ज्याअ . कोज्याक+कोज्याअ . ज्याक।

तथा कोज्या (अ+क) = कोज्याअ . कोज्याक– ज्याअ . ज्याक।

∴ यदि अ = ९०° तदा ज्या (९०°+क) = कोज्याक।

तथा कोज्या (९०°+क) = – ज्याक।

एवं यदि अ=१८०° तदा ज्या (१८०°+क)= – ज्याक।

कोज्या (१८०°+क)= – कोज्याक

१९। षोडशप्रक्रमोक्तानि (१, २, ३, ४), एतानि समीकरणानि यदीष्टज्यासार्धे चापीयान्यपेक्षितानि स्युस्तदा (प्र० १५) रीत्या।

$$\frac{\text{ज्या}(\text{अ}+\text{क})}{\text{त्रि}}=\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\cdot\frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}}+\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}}\cdot\frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\therefore\ \text{ज्या}(\text{अ}+\text{क})=\frac{\text{ज्याअ}\ .\ \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}}+\frac{\text{कोज्याअ}\ .\ \text{ज्याक}}{\text{त्रि}}\ ।$$

$$\text{एवमेव ज्या}(\text{अ}-\text{क})=\frac{\text{ज्याअ}\ .\ \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}}-\frac{\text{कोज्याअ}\ .\ \text{ज्याक}}{\text{त्रि}}\ ।$$

अत एव श्रीभास्कराचार्यः सिद्धान्तशिरोमणेरन्त्यज्योत्पत्तौ-

"चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते ।
त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं तच्चापैक्यस्य दोर्ज्यका ॥
चापान्तरस्य जीवा स्यात् तयोरन्तरसंमिता"—इति ।

$$\text{एवम्}\ \frac{\text{कोज्या}(\text{अ}+\text{क})}{\text{त्रि}}=\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}}\cdot\frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}}-\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\cdot\frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\therefore\ \text{कोज्या}(\text{अ}+\text{क})=\frac{\text{कोज्याअ}\ .\ \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}}-\frac{\text{ज्याअ}\ .\ \text{ज्याक}}{\text{त्रि}}\ ।$$

$$\text{एवम् कोज्या}(\text{अ}-\text{क})=\frac{\text{कोज्याअ}\ .\ \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}}+\frac{\text{ज्याअ}\ .\ \text{ज्याक}}{\text{त्रि}}\ ।$$

अत एव श्रीकमलाकरभट्टस्तत्त्वविवेकस्पष्टाधिकारे ज्योत्पत्तौ-

"दोर्ज्ययोः कोटिमौर्व्योश्च घातौ त्रिज्योद्धृतौ तयोः ।
वियोगयोगौ जीवे स्तश्चापैक्यान्तरकोटिजे"—इति ॥

२० । अथ चापद्वययोगान्तरस्पर्शरेखादिस्वरूपम् ।

यतः

— (अ + क) = ज्याअ . कोज्याक + कोज्याअ . ज्याक । (१)

ज्या (अ − क) = ज्याअ . कोज्याक − कोज्याक . ज्याक। (२)

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ . कोज्याक−ज्याअ . ज्याक। (३)

कोज्या (अ − क) = कोज्याअ . कोज्याक+ज्याअ . ज्याक। (४)

अतः (१) (२) अनयोः (३) (४) अनयोश्च पृथक् योगान्तराभ्याम्

ज्या (अ + क) + ज्या (अ − क)= २ ज्याअ . कोज्याक ।

ज्या (अ + क) − ज्या (अ − क)= २ कोज्याअ . ज्याक ।

कोज्या (अ + क) + कोज्या (अ − क)= २ कोज्याअ . कोज्याक ।

कोज्या (अ − क)− कोज्या (अ + क)= २ ज्याअ . ज्याक ।

एवम् (१) (२) अनयोर्वधतः

ज्या (अ+क) . ज्या (अ−क)=ज्या^{२}अ . कोज्या^{२}क−कोज्या^{२}अ . ज्या^{२}क

= ज्या^{२}अ (१ − ज्या^{२}क)−(१− ज्या^{२}अ) ज्या^{२}क

= ज्या^{२}अ − ज्या^{२}अ . ज्या^{२}क − ज्या^{२}क+ज्या^{२}अ . ज्या^{२}क

= ज्या^{२}अ − ज्या^{२}क = (ज्याअ + ज्याक) (ज्याअ − ज्याक)

= १ − कोज्या^{२}अ − (१−कोज्या^{२}क)=कोज्या^{२}क−कोज्या^{२}अ

=(कोज्याअ+कोज्याक) (कोज्याक− कोज्याअ) ।

एवमेव (३) (४) अनयोर्वधतः कोज्या (अ+क) . कोज्या (अ−क)

= कोज्या^{२}अ . कोज्या^{२}क − ज्या^{२}अ . ज्या^{२}क

= (१ − ज्या^{२}अ) कोज्या^{२}क − ज्या^{२}अ (१ − कोज्या^{२}क)

= कोज्या^{२}क − ज्या^{२}अ = (कोज्याक+ज्याअ) (कोज्याक−ज्याअ)

= १ − ज्या^{२}क − १ + कोज्या^{२}अ = कोज्या^{२}अ − ज्या^{२}क

= (कोज्याअ + ज्याक) . (कोज्याअ − ज्याक) ।

एवम् (१) अस्मिन् (२) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{ज्या (अ − क)}} = \frac{\text{ज्याअ . कोज्याक + कोज्याअ . ज्याक}}{\text{ज्याअ . कोज्याक − कोज्याअ . ज्याक}} \text{ ।}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक}} + \frac{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक}} - \frac{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{स्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{१ + \text{कोस्पअ} \,.\, \text{स्पक}}{१ - \text{कोस्पअ} \,.\, \text{स्पक}} = \frac{\text{स्पअ} \,.\, \text{कोस्पक} + १}{\text{स्पअ} \,.\, \text{कोस्पक} - १} \text{ ।}$$

एवमेव $\frac{\text{कोज्या}\,(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}\,(\text{अ}-\text{क})} = \frac{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \,.\, \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक} + \text{ज्याअ} \,.\, \text{ज्याक}}$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पक} + \text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ} \,.\, \text{कोस्पक} - १}{\text{कोस्पअ} \,.\, \text{कोस्पक} + १}$$

$$= \frac{१ - \text{स्पअ} \,.\, \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ} \,.\, \text{स्पक}} \text{ ।}$$

एवम् (१) अस्मिन् (२) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या}\,(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}(\text{अ}+\text{क})} = \text{स्प}(\text{अ}+\text{क}) = \frac{\text{ज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \,.\, \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \,.\, \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \,.\, \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ} \,.\, \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पअ} \,.\, \text{कोस्पक} - १}$$

$$= \frac{१ + \text{कोस्पअ . स्पक}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{स्पअ . कोस्पक} + १}{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

एवमेव (२) अस्मिन् (४) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\text{स्प}(\text{अ}-\text{क}) = \frac{\text{ज्याअ . कोज्याक} - \text{कोज्याअ . ज्याक}}{\text{कोज्याअ . कोज्याक} + \text{ज्याअ . ज्याक}} = \frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ . स्पक}} \text{ ।}$$

२१ । ज्याकोटिज्ययोः स्वरूपान्तरं प्रदर्श्यते ।

कल्प्यते अ = प + फ, क = प − फ,

$\therefore$ प = $\frac{१}{२}$ (अ + क), फ = $\frac{१}{२}$ (अ − क),

$\therefore$ ज्याअ = ज्या (प+फ) = ज्याप . कोज्याफ + कोज्याप . ज्याफ

= ज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क). कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ−क)

+ कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क) . ज्या $\frac{१}{२}$ (अ−क) = (आ) ।

एवमेव ज्याक

= ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) . कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ − क)

− कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) . ज्या $\frac{१}{२}$ (अ − क) = (का) ।

कोज्याअ

= कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) . कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ − क)

− ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) . ज्या $\frac{१}{२}$ (अ − क) = (गा) ।

कोज्याक

= कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) . कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ − क)

+ ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) . ज्या $\frac{१}{२}$ (अ − क) = (घा) ।

२२ । अनेन ज्ययोः कोटिज्ययोश्च योगान्तरे प्रदर्श्येते ।

(आ) (का) अनयोः (गा) (घा) अनयोश्च पृथग्योगान्तराभ्यां सिद्धम्—

ज्याअ + ज्याक

$= ❀ २ ज्या \frac{1}{2} (अ + क) कोज्या \frac{1}{2} (अ - क) = (पा)$ ।

ज्याअ - ज्याक

$= २ कोज्या \frac{1}{2} (अ + क) . ज्या \frac{1}{2} (अ - क) = (फा)$ ।

कोज्याअ + कोज्याक

$= २ कोज्या \frac{1}{2} (अ + क) कोज्या \frac{1}{2} (अ - क) = (बा)$ ।

कोज्याक - कोज्याअ

$= † २ ज्या \frac{1}{2} (अ + क) ज्या \frac{1}{2} (अ - क) = (भा)$ ।

(१) (पा) अस्मिन् (फा) अनेन भक्ते लब्धम्

$$= \frac{ज्याअ + ज्याक}{ज्याअ - ज्याक} = \frac{२ ज्या\frac{1}{2} (अ+क) . कोज्या\frac{1}{2} (अ-क)}{२ कोज्या\frac{1}{2} (अ+क) . ज्या\frac{1}{2} (अ-क)}$$

❀ अत इष्टव्यासार्धे परिणामिते ज्याअ + ज्याक

$$= \frac{२ ज्या \frac{1}{2} (अ + क) कोज्या (अ - क)}{त्रि}$$ । ज्याअ - ज्याक

$$= \frac{२कोज्या (अ + क) ज्याअ (अ - क)}{त्रि}$$ । अतः

"चापविश्लेषयोगार्धजीवे कोटिज्यकाहते ।
मिथस्त्रिज्याहृते द्विघ्न्यौ चापज्याावियुतिर्युतिः" ।

इति विशेषोक्तमुपपद्यते ।

† अत्रापीष्टव्यासार्धे परिणामनेन

"चापविश्लेषयोगार्धज्ययोः कोटिज्ययोर्हतिः ।
द्विगुणा त्रिगुणाप्ता च कोटिज्याावियुतिर्युतिः" ॥

इदमपि विशेषोक्तमुपपद्यते ।

$$= \frac{\text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})} \times \frac{\text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}{\text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \text{स्प} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) \times \text{कोस्प} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})$$

$$= \text{स्प} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) \times \frac{१}{\text{स्प} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{स्प} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})}{\text{स्प} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})} \text{।}$$

(२) (बा) अस्मिन् (भा) भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प}\frac{१}{२} (\text{अ}+\text{क}) . \text{कोस्प}\frac{१}{२} (\text{अ}-\text{क}) \text{।}$$

(३) $\text{पा} \div \text{बा} = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}}$

$$= \frac{२ \, \text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) . \text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}{२ \, \text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) . \text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})} = \text{स्प} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) \text{।}$$

(४) $\text{फा} \div \text{भा} = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}}$

$$= \frac{२ \text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) . \text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}{२ \, \text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क}) . \text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})}{\text{ज्या} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})} = \text{कोस्प} \frac{१}{२} (\text{अ} + \text{क})$$

(५) $\text{पा}\div\text{भा}=\dfrac{\text{ज्याअ}+\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}-\text{कोज्याअ}}=\text{कोस्प}\ \frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})$ ।

(६) $\text{फा}\div\text{बा}=\dfrac{\text{ज्याअ}-\text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ}+\text{कोज्याक}}=\text{स्प}\ \frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})$ ।

२३ । ध्यादिगुणितभुजांशजीवाकोटिज्यादि प्रदर्श्यते ।

∴ ज्या (न+१) अ = ज्या (अन + अ)

= ज्याअन . कोज्याअ+कोज्याअन . ज्याअ ।

कोज्या (न+१)अ = कोज्या (अन + अ)

= कोज्याअन . कोज्याअ – ज्याअन · ज्याअ ।

∴ यदि न = १, २, ३,... ... स्यात्

तदा (१) ज्या २ अ = २ज्याअ . कोज्याअ ।

(२) कोज्या २ अ = कोज्या^{2}अ – ज्या^{2}अ ।

= १ – २ ज्या^{2}अ = २कोज्या^{2}अ – १ ।

(३) ज्या३अ = ज्या२अ . कोज्याअ+कोज्या२अ . ज्याअ

= २ज्याअ . कोज्या^{2}अ+कोज्या^{2} अ. ज्याअ–ज्या^{3}अ

= ३ज्याअ . कोज्या^{2}अ–ज्या^{3}अ=३ज्याअ–४ज्या^{3}अ ।

(४) कोज्या३अ = कोज्या२अ . कोज्याअ–ज्या२अ . ज्याअ

=(२कोज्या^{2}अ–१) . कोज्याअ–२ज्या^{2}अ . कोज्याअ

= २कोज्या^{3}अ–कोज्याअ–२कोज्याअ+२कोज्या^{3}अ

= ४ कोज्या^{3}अ – ३ कोज्याअ, इत्यादि ।

२४ । द्विगुणज्याकोटिज्याप्रदर्शनं ततोऽर्धांशज्या-कोटिज्यानयनं च ।

अनन्तरोक्तप्रक्रमस्थात् (२) अस्मात्

$$२ \text{ ज्या}^२ अ = १ - \text{कोज्या } २ अ = \qquad (\text{पा})।$$

$$२ \text{ कोज्या}^२ अ = १ + \text{कोज्या } २ अ = \qquad (\text{फा})।$$

(१) यदि (पा) इदं (फा) अनेन ह्रियते

$$\text{तदा } \frac{\text{ज्या}^२ अ}{\text{कोज्या}^२ अ} = \text{स्प}^२ अ = \frac{१ - \text{कोज्या } २ अ}{१ + \text{कोज्या } २ अ}।$$

(२) यदि (पा), (फा) अनयोः (२अ) (इदम्) (अ) अनेनोत्थाप्यते

$$\left.\begin{array}{l} \text{तदा } २\text{ज्या}^२ \tfrac{१}{२}अ = १ - \text{कोज्या}अ \\ २ \text{ कोज्या}^२ \tfrac{१}{२}अ = १ + \text{कोज्या}अ \end{array}\right\}$$ एतयोः (१५) प्रक्रमोक्तरीत्या इष्ट-व्यासार्धे परिणामितयोः सिद्धम्

$$२ \text{ ज्या}^२ \tfrac{१}{२}अ = \text{त्रि}^२ - \text{त्रि} . \text{कोज्या}अ = \text{त्रि } (\text{त्रि} - \text{कोज्या}अ) = (\text{ता})।$$

$$२\text{कोज्या}^२ \tfrac{१}{२}अ = \text{त्रि}^२ + \text{त्रि} . \text{कोज्या}अ = \text{त्रि } (\text{त्रि} + \text{कोज्या}अ) = (\text{था})।$$

(३) (ता) अस्मादिदमुत्पद्यते $२\text{ज्या}^२ \tfrac{१}{२}अ = \dfrac{२\text{त्रि}^२ - २\text{त्रि}.\text{कोज्या}अ}{२}$

$$= \frac{\text{ज्या}^२ अ + \text{कोज्या}^२ अ + \text{त्रि}^२ - २\text{त्रि} . \text{कोज्या}अ}{२} = \frac{\text{ज्या}^२ अ + (\text{त्रि} - \text{कोज्या}अ)^२}{२}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^२ अ + \text{उ}^२ अ}{२}, \quad \therefore \text{ज्या}\tfrac{१}{२}अ = \tfrac{१}{२}\sqrt{\text{ज्या}^२ अ + \text{उ}^२ अ}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

"क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्दलं तदर्धांशकशिञ्जिनी स्यात्"—इति।

एवम् $\text{ज्या}\tfrac{१}{२} अ = \sqrt{\tfrac{१}{२} \text{त्रि } (\text{त्रि} - \text{कोज्या}अ)} = \sqrt{\tfrac{१}{२}\text{त्रि} . \text{उ}अ}$ ।

अत एव भास्कराचार्यः—

"त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा"—इति।

(४) यदि (ता), (था) अत्र (अ) वर्णः (९०° ∓ अ) अनेनोत्थाप्यते

$$\text{तदा } २ \text{ ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp अ) = \text{त्रि}^२ - \text{त्रि} . \text{कोज्या } (९०^\circ \mp अ)$$

$$= \text{त्रि}^२ \mp \text{त्रि} . \text{ज्या}अ \quad ।$$

$$२ \text{ कोज्या}^२ \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp अ) = \text{त्रि}^२ \mp \text{त्रि} \,.\, \text{कोज्या} (९०^\circ \mp अ)$$

$$= \text{त्रि}^२ \pm \text{त्रि} \,.\, \text{ज्याअ} ।$$

$$\therefore \text{ज्या} \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp अ) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^२ \mp \text{त्रि}.\text{ज्याअ}}{२}}$$

$$\text{कोज्या} \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp अ) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^२ \pm \text{त्रि}.\text{ज्याअ}}{२}}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

"त्रिज्याभुजज्याहतिहीनयुक्ते त्रिज्याकृती तद्दलयोः पदे स्तः ।
भुजोनयुक्तत्रिभखण्डयोर्ज्ये कोटिं भुजज्यां परिकल्प्य चैवम्"–इति॥

२५ । (२२) भक्रमस्थयोः (फा) (भा) अनयोर्वर्गयोगे कृते सिद्धम् ।

$$(\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^२ + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^२$$

$$= ४ \text{ कोज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ + क) \,.\, \text{ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ - क)$$

$$+ ४ \text{ ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ + क) \,.\, \text{ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ - क)$$

$$= ४ \text{ ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ - क) \left\{ \text{कोज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ + क) + \text{ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ + क) \right\}$$

$$= ४ \text{ ज्या}^२ \tfrac{१}{२} (अ - क)$$

$$\therefore \text{ज्या} \tfrac{१}{२} (अ - क) = \tfrac{१}{२} \sqrt{(\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^२ + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^२}$$

एवमनेकधा ।

अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामितेऽपि विकारो न भवति । अत एव भास्कराचार्यः—

"यद्दोर्ज्ययोरन्तरमिष्टयोर्यत् कोटिज्ययोस्तत्कृतियोगमूलम् ।
दलीकृतं स्याद्भुजयोर्वियोगखण्डस्य जीवैवमनेकधा वा"–इति॥

२६। अनन्तरप्रक्रमस्थसमीकरणे यदि (क) कोणः (९०°– अ) अनेनोत्थाप्यते तदा–

$$ज्या\frac{1}{2}\{अ-(90^\circ-अ)\} = \frac{1}{2}\sqrt{(ज्याअ-कोज्याअ)^2+(ज्याअ-कोज्याअ)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(ज्याअ-कोज्याअ)^2}{2}}$$ एवमनेकधा।

अत एव भास्कराचार्यः—

"दोःकोटिजीवाविवरस्य वर्गो दलीकृतस्तस्य पदेन तुल्या।
स्यात् कोटिबाह्वोर्विवरार्धजीवा ...."–इति।

२७। भुजकोटिचापांशान्तरज्यानयनम्।

(२४) प्रक्रमतः $कोज्या२अ = 1 - २ज्या^2अ$।

अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामिते $कोज्या२अ = त्रि - \frac{२ज्या^2अ}{त्रि}$

वा $कोज्या२अ = ज्या(90^\circ - २अ) = ज्या\{(90^\circ-अ)-अ\}$

$$= त्रि - \frac{ज्या^2अ}{\frac{1}{2}त्रि}$$ एवमनेकधा।

अत एव श्रीभास्कराचार्यः—

"दोर्ज्याकृतिर्व्यासदलार्धभक्ता लब्धत्रिमौर्व्योर्विवरेण तुल्या।
दोःकोटिभागान्तरशिञ्जिनी स्यात् ... ..."–इति।

२८। अथ पूर्वोक्तार्धांशज्याकोटिज्ययो रूपान्तरानयनम्।

$\because 1 = कोज्या^2अ + ज्या^2अ$।

एवम् $ज्या२अ = २\,ज्याअ\,.\,कोज्याअ$

$\therefore 1 + ज्या२अ = कोज्या^2अ + २\,ज्याअ\,.\,कोज्याअ + ज्या^2अ$

$= (कोज्याअ + ज्याअ)^2$।

$$१ - ज्या २ अ = कोज्या^{२}अ - २ ज्याअ . कोज्याअ + ज्या^{२}अ$$
$$= (कोज्याअ - ज्याअ)^{२}$$

$$\therefore कोज्याअ + ज्याअ = \pm\sqrt{१ + ज्या२अ}$$
$$कोज्याअ - ज्याअ = \pm\sqrt{१ - ज्या२अ}$$

(१) अत्र यदि $२अ < ९०^{\circ} \therefore अ < ४५^{\circ}$

तदा पूर्वसमीकरणमीदृक् स्यात्—

$$\left.\begin{array}{l} कोज्याअ + ज्याअ = \sqrt{१ + ज्या २ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ = \sqrt{१ - ज्या २ अ} \end{array}\right\} \quad (पा)$$

(२) यदि $२अ > ९०^{\circ} < १८०^{\circ}$ अतः $अ > ४५^{\circ} < ९०^{\circ}$

$$तदा \quad \left.\begin{array}{l} कोज्याअ + ज्याअ = \sqrt{१ + ज्या२अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ = -\sqrt{१ - ज्या२अ} \end{array}\right\} \quad (फा)$$

(३) यदि $२अ > १८०^{\circ} < २७०^{\circ} \therefore अ > ९०^{\circ} < १३५^{\circ}$

$$तदा \quad \left.\begin{array}{l} कोज्याअ + ज्याअ = \sqrt{१ - ज्या२अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ = -\sqrt{१ + ज्या२अ} \end{array}\right\} \quad (बा)$$

(४) यदि $२अ > २७०^{\circ} < ३६०^{\circ} \therefore अ > १३५^{\circ} < १८०^{\circ}$

$$तदा \quad \left.\begin{array}{l} कोज्याअ + ज्याअ = -\sqrt{१ - ज्या२अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ = -\sqrt{१ - ज्या२अ} \end{array}\right\} \quad (भा)$$

(५) (पा) (फा) अनयोः प्रत्येकयोगान्तरतः सिद्धम्

$$कोज्याअ = \frac{१}{२}\left(\sqrt{१ + ज्या२अ} \pm \sqrt{१ - ज्या२अ}\right)$$
$$ज्याअ = \frac{१}{२}\left(\sqrt{१ + ज्या२अ} \mp \sqrt{१ - ज्या२अ}-\right).$$

अत्र यथा यथा नवत्यल्पः कोणः ४५ अंशेभ्यो न्यूनोऽधिको वा स्यात् तथा तथा प्रतिसमीकरणं द्वितीयपक्षस्थद्वितीयपदचिह्नमूर्ध्वमधरं वा बोध्यम्।

२९। शिष्यबुद्धिवैशद्यार्थमस्मिन् प्रक्रमे ज्यादीनां मानानां वैचित्र्यं प्रदर्श्यते (यच्च पूर्वोक्तप्रक्रमेभ्यः स्वल्पायासेनोत्पद्यते)

(१) * $\text{ज्याअ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}} = \text{कोज्याअ} . \text{स्पअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}}$

$$= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}}$$

$$= \frac{\text{छेअ} . \text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{स्पअ} . \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}}{\text{छेअ}} ।$$

(२) $\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\text{छेअ}}$

$$= \frac{\text{स्पअ} . \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{ज्याअ} . \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \text{ज्याअ} . \text{कोस्पअ}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}} ।$$

(३) $\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}} = \frac{\text{कोज्याअ} . \text{छेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}$$

---

* १, २, ३, ... इत्यादीनां वैशद्यं ग्रन्थान्ते द्रष्टव्यम्।

$$= \frac{\text{ज्याअ . कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ . कोस्प}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{२उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}}{\text{१} - \text{उअ}} \text{ ।}$$

(४) $\text{कोस्पअ} = \frac{\text{१}}{\text{स्पअ}} = \sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ} - \text{१}}$

$$= \frac{\text{ज्याअ . कोछेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोज्याअ . छेअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^2\text{अ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\sqrt{\text{१} - \text{कोज्या}^2\text{अ}}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ} - \text{१}}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ . स्प}^2\text{अ}} = \frac{\text{१} - \text{उअ}}{\sqrt{\text{२ उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}} \text{ ।}$$

(५) $\text{छेअ} = \sqrt{\text{१} + \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}}$

$$= \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ . कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{स्पअ . कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ . कोछेअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{१} + \text{कोस्प}^2\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ} - \text{१}}} = \text{स्पअ . कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{१} - \text{उअ}} \text{ ।}$$

(६) $कोछेअ = \sqrt{१ + कोस्प^{२}अ} = \frac{१}{ज्याअ} = \frac{छेअ}{स्पअ}$

$$= \frac{कोस्पअ}{कोज्याअ} = \frac{१}{कोज्याअ . स्पअ} = \frac{स्पअ . कोस्पअ}{ज्याअ}$$

$$= \frac{कोज्याअ . छेअ}{ज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{१ - कोज्या^{२}अ}} = \frac{\sqrt{१ + स्प^{२}अ}}{स्पअ}$$

$$= \frac{छेअ}{\sqrt{छे^{२}अ - १}} = कोस्पअ . छेअ = \frac{१}{\sqrt{२ उअ - उ^{२}अ}} ।$$

(७) $उअ = १ - कोज्याअ = १ - \sqrt{१ - ज्या^{२}अ}$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + स्प^{२}अ}} = १ - \frac{कोस्पअ}{\sqrt{१ + कोस्प^{२}अ}}$$

$$= १ - \frac{१}{छेअ} = १ - \frac{\sqrt{कोछे^{२}अ - १}}{कोछेअ} ।$$

३० । अस्मिन् प्रक्रमे कोणस्य ज्यादिभ्यो द्विगुणस्य तत्कोणस्य ज्यादीनां मानानि प्रदर्श्यन्ते ।

(१) $ज्या२अ = २ज्याअ . कोज्याअ = \frac{२ज्या^{२}अ}{स्पअ} = \frac{२कोज्या^{२}अ}{कोस्पअ}$

$$= \frac{२ज्याअ}{छेअ} = \frac{२कोज्याअ}{कोछेअ} = \frac{२स्पअ}{१ + स्प^{२}अ} = \frac{२स्पअ}{छे^{२}अ}$$

$$= \frac{२}{स्पअ + कोस्पअ} = \frac{२कोस्पअ}{१ + कोस्प^{२}अ} = \frac{२कोस्पअ}{कोछे^{२}अ} ।$$

(२) $\text{कोज्या}२\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = १ - २\,\text{ज्या}^2\text{अ}$

$$= २\text{कोज्या}^2\text{अ} - १ = \frac{१ - \text{स्प}^2\text{अ}}{१ + \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - १}{\text{कोस्प}^2\text{अ} + १} = \frac{२ - \text{छे}^2\text{अ}}{\text{छे}^2\text{अ}} = \frac{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^2\text{अ} - २}{\text{कोछे}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोछेअ} - २\text{ज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

(३) $$\text{स्प}२\text{अ} = \frac{२\text{स्पअ}}{१ - \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} = \frac{२\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}}{१ - २\text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - १} = \frac{२\text{स्पअ}}{२ - \text{छे}^2\text{अ}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ} - २} \text{ ।}$$

(४) $$\text{कोस्प}२\text{अ} = \frac{१ - \text{स्प}^2\text{अ}}{२\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - १}{२\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{२}$$

$$= \frac{१ - २\text{ज्या}^2\text{अ}}{२\,\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}} = \frac{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{२ - \text{छे}^2\text{अ}}{२\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^2\text{अ} - २}{२\text{कोस्पअ}} \text{ ।}$$

(५) $$\text{छे}२\text{अ} = \frac{\text{छे}^2\text{अ}}{२ - \text{छे}^2\text{अ}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}$$

$$=\frac{\text{१}}{\text{१}-\text{२ज्या}^{२}\text{अ}}=\frac{\text{१}+\text{स्प}^{२}\text{अ}}{\text{१}-\text{स्प}^{२}\text{अ}}=\frac{\text{कोस्पअ}+\text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ}-\text{स्पअ}}=\frac{\text{कोस्प}^{२}\text{अ}+\text{१}}{\text{कोस्प}^{२}\text{अ}-\text{१}}$$

$$=\frac{\text{कोछे}^{२}\text{अ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ}-\text{२}}\ \text{।}$$

(६) $\text{कोछे२अ}=\frac{\text{१}}{\text{२}}\text{छेअ}\cdot\text{कोछेअ}=\frac{\text{छेअ}}{\text{२ज्याअ}}=\frac{\text{कोछेअ}}{\text{२कोज्याअ}}$

$$=\frac{\text{१}}{\text{२ज्याअ}\cdot\text{कोज्याअ}}=\frac{\text{१}+\text{स्प}^{२}\text{अ}}{\text{२स्पअ}}=\frac{\text{छे}^{२}\text{अ}}{\text{२स्पअ}}=\frac{\text{स्पअ}+\text{कोस्पअ}}{\text{२}}$$

$$=\frac{\text{१}+\text{कोस्प}^{२}\text{अ}}{\text{२कोस्पअ}}=\frac{\text{कोछे}^{२}\text{अ}}{\text{२कोस्पअ}}\ \text{।}$$

(७) $\text{उ२अ}=\text{२ज्या}^{२}\text{अ}=\text{२}-\text{२कोज्या}^{२}\text{अ}=\frac{\text{२स्प}^{२}\text{अ}}{\text{१}+\text{स्प}^{२}\text{अ}}$

$$=\frac{\text{२स्प}^{२}\text{अ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}}=\frac{\text{२स्पअ}}{\text{स्पअ}+\text{कोस्पअ}}=\frac{\text{२}}{\text{१}+\text{कोस्प}^{२}\text{अ}}=\frac{\text{२}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ}}$$

$$=\frac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोछेअ}}=\text{२}\frac{\text{छे}^{२}\text{अ}-\text{१}}{\text{छे}^{२}\text{अ}}=\text{२}\frac{\text{छेअ}-\text{कोज्याअ}}{\text{छेअ}}\ \text{।}$$

३१ । अस्मिन् प्रक्रमे निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं प्रदर्श्यते ।

(१) ४५अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् । ∵ (२३) प्रक्रमस्थात्

(२) अस्मात् $\text{२ज्या}^{२}\text{अ}=\text{१}-\text{कोज्या२अ}$

तथा $\text{२कोज्या}^{२}\text{अ}=\text{१}+\text{कोज्या२अ}$ एवं सिद्धम् ।

$\therefore$ यदि अ $= ४५^\circ$ तदा

$$२ \text{ ज्या}^२ ४५^\circ = १ - \text{कोज्या } ९०^\circ = १ = २ \text{ कोज्या}^२ ४५^\circ$$

$$\therefore \text{ ज्या } ४५^\circ = \pm \sqrt{\frac{१}{२}} = \text{कोज्या } ४५^\circ \text{ ।}$$

अत्रर्णमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

(२) ३० अंशानाम् ६० अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ $= ३०^\circ$ कल्प्येत तदा ज्या२अ = कोज्याअ,

$\because$ ज्या२अ = २ज्याअ . कोज्याअ

$\therefore$ २ज्याअ . कोज्याअ = कोज्याअ

$\therefore$ ज्याअ $= \frac{१}{२} =$ ज्या $३०^\circ =$ कोज्या ६०° ।

$$\text{कोज्या}३०^\circ = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ ३०^\circ} = \sqrt{१ - \tfrac{१}{४}} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{ज्या}६०^\circ$$

(३) १८° अंशानाम् ७२° अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ $= १८^\circ$ तदा ज्या२अ = कोज्या३अ ।

$\because$ ज्या२अ = २ ज्याअ · कोज्याअ,

(२३ प्र.) कोज्या३अ = कोज्याअ − ४ ज्या^{२}अ . कोज्याअ ।

$\therefore$ २ ज्याअ . कोज्याअ = कोज्याअ − ४ ज्या^{२}अ . कोज्याअ ।

$\because$ २ ज्याअ = १ − ४ ज्या^{२}अ $\therefore$ ४ ज्या^{२}अ + २ज्याअ = १

$$\therefore \text{ वर्गसमीकरणविधिना ज्याअ} = \frac{\pm\sqrt{५} - १}{४}$$

अत्रापि ऋणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

$$\therefore \text{ ज्या } १८^\circ = \frac{\sqrt{५} - १}{४} = \text{कोज्या } ७२^\circ$$

अत एव कोज्या $१८^\circ = \sqrt{१ - ज्या^२ १८^\circ} = \sqrt{१ - \left(\frac{\sqrt{५} - १}{४}\right)^२}$

$$= \sqrt{१ - \frac{६ - २\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१० + २\sqrt{५}}{१६}}$$

$$= \frac{\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{४} = ज्या\ ७२^\circ \text{ ।}$$

(४) ३६ अंशानाम् ५४ अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८° तदा ज्या २ अ = २ ज्याअ . कोज्याअ,

$$\therefore\ ज्या ३६^\circ = २\left(\frac{\sqrt{५} - १}{४}\right)\left(\frac{\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{४}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{१० - २\sqrt{५}}}{४} = कोज्या\ ५४^\circ$$

अत एव कोज्या $३६^\circ = \sqrt{१ - ज्या^२ ३६^\circ} = \sqrt{१ - \frac{१० - २\sqrt{५}}{१६}}$

$$= \sqrt{\frac{६ + २\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{५} + १}{४} = ज्या\ ५४^\circ \text{ ।}$$

(५) ३० एषाम् १८ एषां चार्धांशज्याकोटिज्यानयनम् ।

तत्र (२८) प्रक्रमोक्तमिदं समीकरणद्वयमुपयुज्यते ।

$$ज्याअ = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + ज्या २ अ} - \sqrt{१ - ज्या २ अ}\right\}$$

$$कोज्याअ = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + ज्या २ अ} + \sqrt{१ - ज्या २ अ}\right\}$$

अत्र यदि २अ = ३०°, तदा ज्या२अ = $\frac{१}{२}$

$$\text{ज्या } १५^\circ = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\frac{१}{२}} - \sqrt{१-\frac{१}{२}}\right\} = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{\frac{३}{२}} - \sqrt{\frac{१}{२}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ७५^\circ \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या } १५^\circ = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\frac{१}{२}} + \sqrt{१-\frac{१}{२}}\right\} = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{\frac{३}{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}} = \text{ज्या } ७५^\circ \text{ ।}$$

$$\text{एवमेव ज्या } ९^\circ = \frac{\sqrt{५}+१}{४\sqrt{२}} - \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४} = \text{कोज्या } ८१^\circ \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या } ९^\circ = \frac{\sqrt{५}+१}{४\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४} = \text{ज्या } ८१^\circ \text{ ।}$$

(६) ३° अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् ।

अष्टादशानां १८ पञ्चदशानां १५ चांशानां ज्याकोटिज्ययोरवगतयोस्त्रयाणामंशानां ज्याकोटिज्ये

$\text{ज्या } ३^\circ = \text{ज्या } (१८^\circ - १५^\circ)$

$= \text{ज्या } १८^\circ \times \text{कोज्या } १५^\circ - \text{कोज्या } १८^\circ \times \text{ज्या } १५$

$\text{कोज्या } ३^\circ = \text{कोज्या } (१८^\circ - १५^\circ)$

$= \text{कोज्या } १८^\circ \times \text{कोज्या } १५^\circ + \text{ज्या } १८^\circ \times \text{ज्या } १५^\circ$

अस्मात् सुखेन ज्ञायते ।

(७) एवं त्रिषण्णवादिनवत्यन्तानामंशानां प्रत्येकं ज्याकोटिज्ये प्रसाध्य बालावबोधार्थं विलिख्यते ।

$$\text{ज्या } ३^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) - \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ८७^\circ$$

ज्या $६^\circ = -\frac{१}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ = कोज्या ८४°।

ज्या $९^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ = कोज्या ८१°।

ज्या $१२^\circ = -\frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ७८°।

ज्या $१५^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}-१)$ = कोज्या ७५°।

ज्या $१८^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१)$ = कोज्या ७२°।

ज्या $२१^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

= कोज्या ६९°।

ज्या $२४^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

= कोज्या ६६°।

ज्या $२७^\circ = -\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ६३°।

ज्या $३०^\circ = \frac{१}{२}$ = कोज्या ६०°।

ज्या $३३^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ५७°।

ज्या $३६^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ = कोज्या ५४° ।

ज्या $३९^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

= कोज्या ५१° ।

ज्या $४२^\circ = -\frac{१}{८}(\sqrt{५}-१) = \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ४८° ।

ज्या $४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$ = कोज्या ४५° ।

ज्या $४८^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ४२° ।

ज्या $५१^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

= कोज्या ३९° ।

ज्या $५४^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}+१)$ = कोज्या ३६° ।

ज्या $५७^\circ = -\frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ३३° ।

ज्या $६०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$ = कोज्या ३०° ।

$$\text{ज्या } ६३^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१)+\frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } २७^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ६६^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}+१)+\frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } २४^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ६९^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१)+\frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } २१^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ७२^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } १८^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ७५^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}+१) \qquad = \text{कोज्या } १५^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ७८^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}-१)+\frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } १२^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ८१^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१)+\frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ९^\circ ।$$

$$\text{ज्या } ८४^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१)+\frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ६^\circ ।$$

$$\text{ज्या } 87^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

= कोज्या ३° ।

ज्या ९०° = १ = कोज्या ०° ।

३२ । अथ कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः * ।

तृतीयोऽध्यायः ३ ।

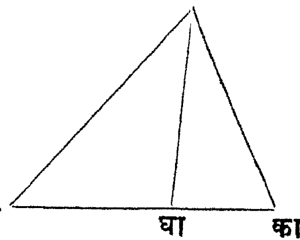
अत्र त्रिभुजचतुर्भुजयोर्वृत्तलग्नसमानर्जुबहुभुजक्षेत्रस्य वृत्तस्य च कतिचन गुणाः प्रदर्श्यन्ते ।

३४ । त्रिभुजे त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति षडवयवा भवन्तीत्युक्तं प्राक् ।

तत्र त्रयः कोणाः क्रमेण आ, का, गा, एभिर्द्योत्याः स्युः । तत्संमुखकोणाश्च क्रमेण अ, क, ग, एभिः ।

३५ । प्रतित्रिभुजं तत्तद्भुजात् तत्तत्संमुखकोणज्या समानगुणा भवति ।

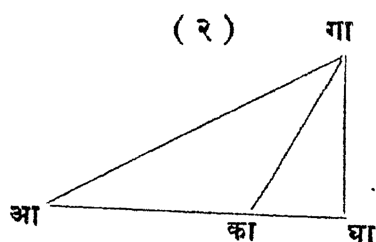
कल्प्यते आकागा–त्रिभुजस्य आ, का, गा, कोणाः । तथा अ, क, ग, क्रमेण तत्संमुखभुजाः । गा-कोणात् आका-भुजे गा-कोण-बिन्दोः गाघा-लम्बः कार्यः ।



तदा ज्याआ $= \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}}$ ।

---

* अस्य प्रकमस्य तथा ३३ प्रकमस्य च केवलं गणिते उपयोगाद्-ग्रन्थान्ते तदुद्देशयं द्रष्टव्यम् ।



ज्याका ज्यागाकाघा, = (द्वि. क्षे.)= $\frac{\text{गाघा}}{\text{कागा}}$ ।

$\therefore \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ । $\therefore$ ज्याआ : ज्याका = अ : क

यद्वा अ : ज्याआ = क : ज्याका ।

साजात्यात् अ : ज्याआ = ग : ज्यागा

क : ज्याका = ग : ज्यागा ।

३६ । त्रिभुजे भुजयोगान्तरादितस्तत्संमुखकोणयोगान्तरार्धस्पर्शरेखादिसम्बन्धः प्रदर्श्यते ।

$\because$ अ : क = ज्याआ : ज्याका

अ + क : अ − क = ज्याआ + ज्याका : ज्याआ − ज्याका

= २ ज्या $\frac{1}{2}$ (आ + का) कोज्या $\frac{1}{2}$ (आ − का) : २कोज्या $\frac{1}{2}$ (आ + का)

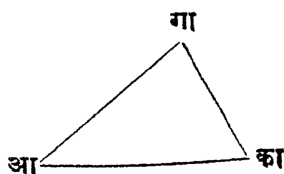
× ज्या $\frac{1}{2}$ (आ − का) = $\frac{\text{ज्या}\frac{1}{2}\text{(आ + का)}}{\text{कोज्या}\frac{1}{2}\text{(आ+का)}} : \frac{\text{ज्या}\frac{1}{2}\text{(आ − का)}}{\text{कोज्या}\frac{1}{2}\text{(आ−का)}}$

= स्प $\frac{1}{2}$ (आ + का) : स्प $\frac{1}{2}$ (आ − का)

यदि भुजयोर्योगेन तयोरन्तरं लभ्यते तदा तत्संमुखकोणयोरैक्यार्धस्य स्पर्शरेखया तयोरन्तरार्धस्य स्पर्शरेखा लभ्यत इत्यर्थः ।

३७ । त्रिभुजे भुजतत्संमुखकोणसम्बन्धतो ज्यास्पर्शरेखादिसम्बन्धः प्रदर्श्यते ।

यदि गा समकोणः स्यात्



$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{स्पआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} । \quad \text{ज्याका} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याका} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} । \text{स्पका} = \frac{\text{आगा}}{\text{कागा}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} ।$$

३८ । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणकोटिज्यानयनयुक्तिः प्रदर्श्यते

(३५ प्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम्)

यदा का कोणो लघुस्तदा $\text{आगा}^2 = \text{आका}^2 + \text{कागा}^2 - 2\text{आका} . \text{काघा}$ यदा च का कोणोऽधिकाख्यस्तदा $\text{आगा}^2 = \text{आका}^2 + \text{कागा}^2 + 2\text{आका} . \text{काघा}$	एते उन्मिती क्रमेण क्षेत्रमितेर्द्वितीयाध्यायस्य त्रयोदशद्वादशप्रतिज्ञाभ्यां संपद्येते ।

तत्र यदा का कोणो लघुस्तदा,

$$\therefore \frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्याका} ।$$

$\therefore$ काघा = कागा . कोज्याका ।

यदा वा का कोणोऽधिकस्तदा

$$\because \frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्यागाकाघा} = -\text{ कोज्याका}$$

$$\therefore \text{काघा} = -\text{कागा} \,.\, \text{कोज्याका}$$

अत उत्थापनेन सिद्धमुभयत्रापि तुल्यमेव ।

$$\because \text{क}^{२} = \text{ग}^{२} + \text{अ}^{२} - \text{२अग} \,.\, \text{कोज्याका} \text{ ।}$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \frac{\text{अ}^{२} + \text{ग}^{२} - \text{क}^{२}}{\text{२अग}} \text{ ।}$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याआ} = \frac{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - \text{अ}^{२}}{\text{२कग}} \text{ ।}$$

$$\text{एवमेव कोज्यागा} = \frac{\text{अ}^{२} + \text{क}^{२} - \text{ग}^{२}}{\text{२अक}} \text{ ※ ।}$$

२९ । त्रिभुजे भुजेभ्योऽभीष्टकोणज्यानयनयुक्तिप्रकारः ।

$$\text{अत्र ज्या}^{२}\text{आ} = १ - \text{कोज्या}^{२}\text{आ}$$

$$= (१ + \text{कोज्याआ})(१ - \text{कोज्याआ})$$

$$\text{परन्तु } १ + \text{कोज्याआ} = १ + \frac{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - \text{अ}^{२}}{\text{२कग}}$$

$$= \frac{\text{२कग} + \text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - \text{अ}^{२}}{\text{२कग}} = \frac{(\text{क}^{२} + \text{२कग} + \text{ग}^{२}) - \text{अ}^{२}}{\text{२कग}}$$

$$= \frac{(\text{क} + \text{ग})^{२} - \text{अ}^{२}}{\text{२कग}} = \frac{(\text{क} + \text{ग} + \text{अ})(\text{क} + \text{ग} - \text{अ})}{\text{२कग}} \text{ ।}$$

※ अनेन—

"भुजवर्गयुतिर्भूमिवर्गोना भुजघातहृत् ।
दलिता त्रिभुजस्यास्त्रकोटिज्या भुजसंयुतौ ॥"

इति विशेषोक्तमप्युपपद्यते ।

तथा $१-\text{कोज्याआ} = १ - \frac{\text{क}^२ + \text{ग}^२ - \text{अ}^२}{२\text{कग}}$

$= \frac{२\text{कग} - \text{क}^२ - \text{ग}^२ + \text{अ}^२}{२\text{कग}} = \frac{\text{अ}^२ - (\text{क}^२ - २\text{कग} + \text{ग}^२)}{२\text{कग}}$

$= \frac{\text{अ}^२ - (\text{क} - \text{ग})^२}{२\text{कग}} = \frac{(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})}{२\text{कग}}$ ।

अथ यदि कल्प्येत $२\text{स} = \text{अ} + \text{क} + \text{ग}$

तदा $२(\text{स} - \text{अ}) = \text{अ} + \text{क} + \text{ग} - २\text{अ} = \text{क} + \text{ग} - \text{अ}$ ।

$२(\text{स} - \text{क}) = \text{अ} + \text{क} + \text{ग} - २\text{क} = \text{अ} + \text{ग} - \text{क}$ ।

$२(\text{स} - \text{ग}) = \text{अ} + \text{क} + \text{ग} - २\text{ग} = \text{अ} + \text{क} - \text{ग}$ ।

$\therefore १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२\text{स} \times २(\text{स} - \text{अ})}{२\text{कग}} = \frac{२\text{स}(\text{स} - \text{अ})}{२\text{कग}}$

तथा $१-\text{कोज्याआ} = \frac{२(\text{स} - \text{क}) \times २(\text{स} - \text{ग})}{२\text{कग}}$

$= \frac{२(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}{२\text{कग}}$ ।

अत एव $\text{ज्या}^२\text{आ} = \frac{४}{\text{क}^२.\text{ग}^२} \text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})$ ।

$\therefore \text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{क}.\text{ग}} \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$

अत्र मानस्य ऋणत्वं न संभवति त्रिभुजैककोणस्य समकोणद्वयाल्पत्वात् तज्ज्याया धनत्वात् ।

$$\text{साजात्यात् ज्याका} = \frac{२}{\text{अग}}\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}\ ।$$

$$\text{ज्यागा} = \frac{२}{\text{अक}}\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}\ ।$$

४० । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणार्धज्याकोटिज्यास्पर्शरेखाणां मानं प्रदर्श्यते ।

$$\because २\text{ज्या}^२\tfrac{१}{२}\text{आ} = १ - \text{कोज्याआ} = \frac{२(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}\ ।$$

$$\therefore \text{ज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}}\ ।$$

$$\because २\text{कोज्या}^२\tfrac{१}{२}\text{आ} = १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}\ ।$$

$$\therefore \text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}}\ ।$$

$$\text{अत एव स्प}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \frac{\text{ज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ}}{\text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ}} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}}\ ।$$

अत्राप्युन्मितीनां धनत्वमेव बोध्यम् ।

$$\text{साजात्यात् ज्या}\tfrac{१}{२}\text{का} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{ग})}{\text{अग}}}\ ।$$

$$\text{ज्या}\tfrac{१}{२}\text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})}{\text{अक}}}\ ।$$

$$\text{कोज्या}\tfrac{1}{2}\text{का} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{क})}{\text{अग}}} \text{ । } \text{कोज्या}\tfrac{1}{2}\text{गा} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{ग})}{\text{अक}}}$$

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{का} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{क})}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})}{\text{स}(\text{स}-\text{ग})}} \text{ ।}$$

४१ । त्रिभुजे भुजेभ्यः क्षेत्रफलानयनयुक्तिप्रकारः प्रदर्श्यते ।

यतो रेखागणितस्य द्वितीयाध्यायतो लम्बगुणं भूम्यर्धं खलु त्रिभुज-क्षेत्रफलं भवति ।

$\therefore$ आकागा–त्रिभुजफलम् $= \frac{1}{2}$ आका $\times$ गाघा

$$= \tfrac{1}{2}\text{ आका} \times \text{आगा} \times \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} = \tfrac{1}{2}\text{ आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$$

$$= \frac{\text{कग}}{2} \cdot \frac{2}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}$$

$$= \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \text{ ।}$$

अत एवार्यभटः—

"सर्वभुजैक्यं दलितं चतुःस्थितं बाहुभिः क्रमाद्रहितम् ।
तद्घातपदं त्रिभुजे क्षेत्रे स्पष्टं फलं भवति ॥"

४२ । (अनु० १) $\because$ त्रिभुजफलम्

$= \frac{1}{2}$ आका $\times$ आगा $\times$ ज्याआ, इति पूर्वप्रक्रमे सिद्धम् ।

∴ त्रिभुजे भुजयोर्घातार्धं भुजान्तर्गतकोणज्यया गुणितं क्षेत्रफलं भवतीत्यवगम्यते ।

४३ । (अनु० २) त्रिभुजे पूर्वोक्तप्रकारैर्लम्बाबाधावगमः सुगमः ।

$$\because \text{कोज्याआ} = \left(\frac{\text{आघा}}{\text{क}}\right) = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{\text{२कग}}$$

$$\therefore \text{आघा} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ग}} \text{ ।}$$

$$\because \text{कोज्याका} = \pm\left(\frac{\text{काघा}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{\text{२अग}}$$

$$\therefore \text{काघा} = \pm\frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{\text{२ग}} \text{ ।}$$

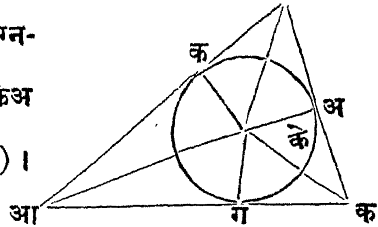
अत्र लम्बो यथा त्रिभुजस्यान्तर्बहिर्वा निपतेत् तदनुसारेण द्वितीयाबाधाया धनर्णत्वं बोध्यम् ।

$$\because \text{ज्याआ} = \left(\frac{\text{गाघा}}{\text{क}}\right) = \frac{\text{२}}{\text{कग}}\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \text{ ।}$$

$$\therefore \text{गाघा} = \frac{\text{२}}{\text{ग}}\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \text{ ।}$$

४४ । त्रिभुजस्य भुजेभ्यस्तदन्तर्बहिर्लग्नयोर्वृत्तयोर्व्यासार्धानयनं प्रदर्श्यते ।

(१) तत्रादौ त्रिभुजान्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धानयनम् ।



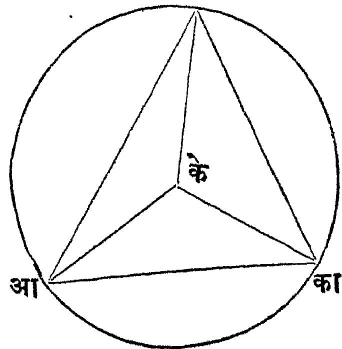
यदि आकागा-त्रिभुजान्तर्लग्न-वृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत तदा केअ = केक = केग = व्यासार्धं = (व) ।

अथ ∵ फ = △ आकेका + △ काकेगा + △ आकेगा

$$= \frac{1}{2} \text{ग.व} + \frac{1}{2} \text{अ.व} + \frac{1}{2} \text{क.व} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}{2} \text{व} = \text{स.व} ।$$

$$\therefore \text{व} = \frac{\text{फ}}{\text{स}} = \frac{\sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}}{\text{स}} ।$$

(२) त्रिभुजबहिर्लग्नवृत्तव्यासार्धानयनम् ।



यदि आकागा-त्रिभुजबहिर्लग्नवृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत तदा केआ = केका = केगा = व्यासार्धं = (वा) । अथ समानभूमौ वर्त्तमानयोः केन्द्रपरिधिलग्नयोः कोणयोराद्योऽन्यतो द्विगुणो भवत्यतः (४२ प्रक्रमतः)

फ = $\frac{1}{2}$ अ.क . ज्या $\frac{1}{2}$ आकेका * ।

---

* अनेन—

"भुजमध्यगता जीवा क्षुण्णा दोष्णोर्वधेन सा ।
दलिता त्रिभुजस्य स्यात् फलं वाऽन्यप्रकारतः ॥"

इति विशेषोक्तमप्युपपद्यते ।

परन्तु ज्या $\frac{1}{2}$ आकेका $= \frac{\frac{1}{2} \text{आका}}{\text{आके}} = \frac{\text{ग}}{२\text{वा}}$ ।

$\therefore$ फ $= \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}}$ $\therefore$ वा $= \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{फ}}$

$$= \frac{\text{अ.क.ग}}{४\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते-त्रिभुजे कोणस्य ज्या तत्कोणसंमुखभुजात् त्रिभुजबहिर्लग्नवृत्तव्यासाप्तेन तुल्या भवतीति ।

४५ । (अनुमा० १) यदि आकागा त्रिभुजे गा-कोणात् आका-भूमौ लम्बः (ल) क्रियते तदा फ $= \frac{1}{2}$ ग.ल ।

अथ पूर्वप्रक्रमतः सिद्धम् फ $= \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}}$ ।

$\therefore \frac{1}{2}$ ग.ल $= \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}}$ $\therefore$ वा $= \frac{\text{अ.क}}{२\text{ल}}$ ।

अत एव सिद्धान्तविषयकक्रोडग्रन्थे मयोक्तम् ।

"त्रिबाहुकबहिर्लग्नवृत्तव्यासदलं किल ।
भुजयोराहतेः खण्डाल्लम्बाप्तेन समं भवेत्"-इति ।

४६ । (अनु० २) ।

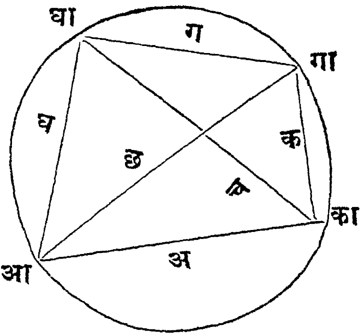
$\therefore$ फ $= \frac{\text{अ}+\text{क}+\text{ग}}{२}$ व $= \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}}$ $\therefore$ २वाव $= \frac{\text{अ.क.ग}}{\text{अ}+\text{क}+\text{ग}}$ ।

अस्मादिदमवगम्यते – त्रिभुजे त्रयाणां भुजानां बधात् तद्योगेनाप्तं त्रिभुजान्तर्बहिर्लग्नवृत्तव्यासाधयोर्बधेन द्विगुणेन तुल्यं भवतीति ।

४७ । अथ वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजेभ्यस्तत्कोणकर्ण-फलादीनामानयनम् ।

कल्प्यते आका = अ, कागा = क, गाघा = ग, घाआ = घ, काघा = च, आगा = छ ।

(१) अतः (३८ प्रक्रमतः)



$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\text{अघ}}$$

$$\text{कोज्यागा} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\text{कग}} \text{।}$$

$\therefore \text{च}^2 = \text{अ}^2 + \text{घ}^2 - २\text{अघ}.\text{कोज्याआ}$

$= \text{क}^2 + \text{ग}^2 - २\text{कग} . \text{कोज्यागा}$

परन्तु क्षेत्रमितेस्तृतीयाध्यायस्यैकविंशप्रतिज्ञया

$$\text{कोज्याआ} = \text{कोज्या} (१८०^\circ - \text{गा}) = - \text{कोज्यागा}$$

$\therefore \text{आ}^2 + \text{घ}^2 - २\text{अघ} . \text{कोज्याआ} = \text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग} . \text{कोज्याआ},$

$$\therefore \quad \text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{क}^2 - \text{ग}^2}{२(\text{अघ} + \text{कग})} = - \text{कोज्यागा}$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याका} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2 - \text{घ}^2}{२(\text{अक} + \text{गघ})} = - \text{कोज्याघा ।}$$

(२) अतः ३९ प्रक्रमोक्तयुक्त्या—

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{अघ} + \text{कग}} \sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})}$$

$\left(\text{अत्र स} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ इति बोध्यम्}\right)$

(३) ४० प्रक्रमोक्तयुक्त्या

$$\text{ज्या}\tfrac{1}{2}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{घ})}{\text{अघ}+\text{कग}}} = \text{कोज्या}\tfrac{1}{2}\text{गा}$$

$$\text{कोज्या}\tfrac{1}{2}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{अघ}+\text{कग}}} = \text{ज्या}\tfrac{1}{2}\text{गा}$$

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{घ})}{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}} = \text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{गा}$$

(४) $\because \frac{\text{अ}^2+\text{घ}^2-\text{च}^2}{2\text{अघ}} = -\frac{\text{क}^2+\text{ग}^2-\text{च}^2}{2\text{कग}}$

$$\therefore \text{च}^2 = \frac{(\text{अग}+\text{कघ})(\text{अक}+\text{गघ})}{\text{अघ}+\text{कग}}$$

$$\text{साजात्यात्}\ \text{छ}^2 = \frac{(\text{अग}+\text{कघ})(\text{अघ}+\text{कग})}{\text{अक}+\text{गघ}}$$

एतेन,

"कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत् ।
योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥"

इति ब्रह्मगुप्तोक्तं वृत्तान्तर्गतविषमचतुर्भुजपरमित्यवगम्यते ।

(५) अत एव चछ = अग + कघ, तथा $\frac{\text{च}}{\text{छ}} = \frac{\text{अक}+\text{गघ}}{\text{अघ}+\text{कग}}$

अतो मत्कृतक्रोडग्रन्थे—

"वृत्तान्तःस्थचतुर्बाहुक्षेत्रे श्रवणयोर्हतिः ।
भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत् ॥"

(६) (आकागाघा) चतुर्भुजफलम् $=\triangle$ आकाघा $+\triangle$ कागाघा

$=\frac{1}{2}$ अघ . ज्याआ $+\frac{1}{2}$ कग . ज्याआ $=\frac{1}{2}$ (अघ + कग)ज्याआ

$=\sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ})}$

अतः श्रीपतिः—

"भुजसमासदलं हि चतुःस्थितं निजभुजैः क्रमशः पृथगूनितम् ।
अथ परस्परमेव समाहतं कृतिपदं त्रिचतुर्भुजयोः फलम् ॥"

(७) यदि (आकाघा) त्रिभुजलग्नवृत्तस्य व्यासार्धं (वा) कल्प्येत

तदा (४४ प्रक्रमतः) $\text{वा}=\frac{\text{अघच}}{4\triangle\text{ आकाघा}}$

परन्तु $\triangle$ आकाघा $=\frac{1}{2}$ अघ . ज्याआ

$\therefore \text{वा}=\frac{\text{अघच}}{2\text{अघ . ज्याआ}}=\frac{\text{च}}{2\text{ज्याआ}}=\frac{\text{च}}{2\text{ज्यागा}}$ ।

$\therefore \text{वा}=\frac{\text{छ}}{2\text{ज्याका}}=\frac{\text{छ}}{2\text{ज्याघा}}$ ।

$\text{ज्याआ}=\frac{2}{\text{अघ}+\text{कग}}\sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ})}$

$$\therefore \text{वा}=\frac{\text{च}}{2\text{ज्याआ}}=\frac{\text{च}(\text{अघ}+\text{कग})}{4\sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ})}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\text{अक}+\text{गघ})(\text{अग}+\text{कघ})(\text{अघ}+\text{कग})}{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ})}}$$

अस्मादिदमवगम्यते विषमचतुर्भुजमात्रं वृत्तान्तः कर्त्तुं शक्यते । अथ च भुजानां क्रमव्यत्यासेऽपि न क्षेत्रफले विकारः किन्तु कोणा-

दिष्वेव । अत्र यदि घ = ० कल्प्येत तदा कोणादीनां मानानि पूर्वसाधितैस्त्रिभुजकोणादीनां मानैरभिन्नानि संपद्यन्ते ।

४८ । विषमचतुर्भुजमात्रस्यान्योन्यसंमुखकोणद्वयविशिष्टेभ्यो भुजेभ्यः फलानयनम् ।

अत्र पूर्वप्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम् ।

तत्र यदि क्षेत्रफलद्योतकं (फ) कल्प्येत तदा

$$\text{फ} = \frac{1}{2}\,(\text{अघ}\,.\,\text{ज्याआ} + \text{कग}\,.\,\text{ज्यागा})$$

परन्तु $\text{कोज्याआ} = \dfrac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{2\text{अघ}}$, $\text{कोज्यागा} = \dfrac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{2\text{कग}}$

$$\therefore \quad 1 + \text{कोज्याआ} = \frac{(\text{अ} + \text{घ})^2 - \text{च}^2}{2\text{अघ}} \quad (1)$$

$$1 - \text{कोज्याआ} = \frac{\text{च}^2 - (\text{अ} - \text{घ})^2}{2\text{अघ}} \quad (2)$$

$$1 + \text{कोज्यागा} = \frac{(\text{क} + \text{ग})^2 - \text{च}^2}{2\text{कग}} \quad (3)$$

$$1 - \text{कोज्यागा} = \frac{\text{च}^2 - (\text{क} - \text{ग})^2}{2\text{कग}} \quad (4)$$

ततः (१) (४) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(\text{अ} + \text{घ})^2 - (\text{क} - \text{ग})^2 = 2\text{अघ}\,(1 + \text{कोज्याआ}) + 2\text{कग}(1 - \text{कोज्यागा})$$

$$\text{वा}\ (\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग}) = \text{अघ}\,.\,\frac{1 + \text{कोज्याआ}}{2} + \text{कग}\,.\,\frac{1 - \text{कोज्यागा}}{2}$$

$=$ *अघ . कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ + कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$गा (५)

एवमेव (२) (३) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

(स − अ)(स − घ)= अघ . ज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ + कग . कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$गा (६)

एवम् (५) (६) अनयोर्गुणनात्

(स − अ)(स − क)(स − ग)(स − घ)

$=$ अ^{2}घ^{2}.ज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ.कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ+अकगघ.कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ.कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$गा

+ क^{2}ग^{2} . ज्या$^{2}\frac{1}{2}$गा . कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$गा + अकगघ . ज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ . ज्या$^{2}\frac{1}{2}$गा †

$=$ (अघ . ज्या$\frac{1}{2}$आ . कोज्या$\frac{1}{2}$आ + कग . ज्या$\frac{1}{2}$गा . कोज्या$\frac{1}{2}$गा)^{2}

+ अकगघ (कोज्या$\frac{1}{2}$आ . कोज्या$\frac{1}{2}$गा − ज्या$\frac{1}{2}$आ . ज्या$\frac{1}{2}$गा)^{2}

$=$ $\frac{1}{4}$(अघ . ‡ ज्याआ + कग . ज्यागा)^{2}+ अकगघ . कोज्या$\frac{1}{2}$(आ+गा)

$=$ फ^{2} + अकगघ . कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$ (आ + गा)

$\therefore$ फ$=\sqrt{\text{(स−अ)(स−क)(स−ग)(स−घ)−अकगघ . कोज्या}^{2}\frac{1}{2}\text{(आ+गा)}}$

अथ $\because$ आ+का+गा+घा=३६०° $\therefore$ $\frac{1}{2}$ (आ+गा)=१८०°−$\frac{1}{2}$(का+घा)

---

* अत्र $\frac{\text{१ + कोज्याआ}}{\text{२}}$ = कोज्या$^{2}\frac{1}{2}$आ, एतदर्थं (२४) प्रक्रमो द्रष्टव्यः ।

† अत्र २अकगघ . ज्या$\frac{1}{2}$आ . कोज्या$\frac{1}{2}$आ . ज्या$\frac{1}{2}$गा . कोज्या$\frac{1}{2}$गा एतत्तुल्यं धनमृणं च क्रियते तथाऽप्यविकार एव ।

‡ २ज्याआ . कोज्याआ = २ज्या२आ । अत्र २आ − स्थाने (आ) अनेनोत्थाप्यते तदा २ज्या$\frac{1}{2}$आ . कोज्या$\frac{1}{2}$आ = ज्याआ ।

$\therefore$ ज्या$\frac{1}{2}$आ . कोज्या$\frac{1}{2}$आ = $\frac{\text{ज्याआ}}{\text{२}}$

$\therefore$ अघ . ज्या$\frac{1}{2}$आ . कोज्या$\frac{1}{2}$आ = $\frac{\text{अघ . ज्याआ}}{\text{२}}$ इतोऽग्रे स्फुटम् ।

$\therefore$ कोज्या$^2\frac{1}{2}$ (आ + गा) = कोज्या$^2\frac{1}{2}$ (का + घा) । अत इदं फलं संमुखकोणद्वययोरन्यतरेण विशिष्टेभ्यश्चतुर्भ्यो भुजेभ्यः सम्पन्नम्।

तत्र यदि आ + गा = का + घा = १८०°

तदा कोज्या$^2\frac{1}{2}$ (आ + गा) = कोज्या$^2\frac{1}{2}$ (का + घा) = ०

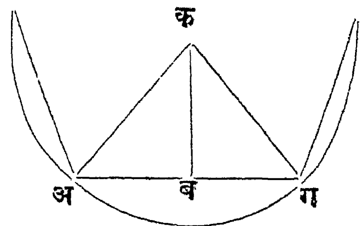
अतोऽत्र फ = $\sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})}$

पूर्वसाधितेन वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजमानेनाभिन्नं जातम् ।

अत एव विषमचतुर्भुजस्यानेकविधेषु फलेषु वृत्तान्तर्गतस्य तस्य फलं महत्तमं भवति । इदमेव पूर्वाचार्यैः स्वग्रन्थेषु साधितम् ।

४९ । वृत्तान्तर्गतस्य समानर्जुबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल (क) वृत्तकेन्द्रं स्यात् तदन्तर्गतस्य समानर्जु - (न) संख्याकभुजक्षेत्रस्य भुजः = अग, (व) = वृत्तस्य व्यासार्धं स्यात् तदा कअ, कग रेखे संयोज्य अग-रेखोपरि कब लम्बः कार्यः ।



अत्र ∠ अकग = $\frac{३६०°}{\text{न}}$

बहुभुजक्षेत्रपरिधिश्च = न . अग = २न . अब

= २न . अक . ज्या∠ अकब = २न . व . ज्या $\frac{१८०°}{\text{न}}$

एवं बहुभुजक्षेत्रफलम् = न . अकगक्षेत्रम् = न . $\frac{\text{अग . कब}}{२}$

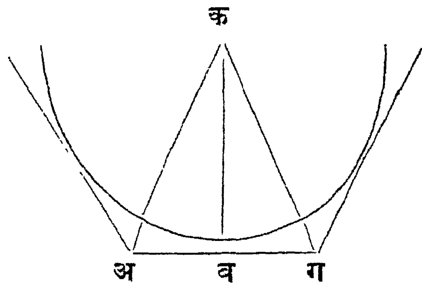
= न . अक . ज्याअकब×अक . कोज्या ∠ अकब

= नव^{२} . ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ ।

अस्मादिदमवगम्यते येषां समानर्जुबहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्तत्क्षेत्रबहिर्लग्नवृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति । तत्तत्क्षेत्रफलं च तत्तत्क्षेत्रबहिर्लग्नवृत्तव्यासार्ध-वर्गात् समानगुणं भवतीति ।

५० । वृत्तबहिर्लग्नस्य ऋजुसमबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल वृत्त बहिर्लग्न(न) संख्याकजुभुजक्षेत्रस्य अग-भुजः ब-स्थाने परिधौ लग्नः ।



बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रपरिधिः = न . अग= २न . अब

= २न . कब . स्पअकब = २नव . स्प $\frac{१८०^{\circ}}{न}$

∴ क्षेत्रफलम् = न . अकगक्षेत्रफलम्

= न × $\frac{\text{अग . कब}}{२}$ = न . कब स्प ∠ अकब × कब

= न . व^{२} . स्प $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ ।

अस्मादिदमवगम्यते येषां समानर्जुबहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्तत्क्षेत्रान्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति तत्तत्क्षेत्रफलं च तत्तदन्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धवर्गात् तुल्यगुणं ❀ भवतीति।

५१। (व)–व्यासार्धविशिष्टस्य वृत्तस्यान्तर्बहिश्च लग्नयोः समानर्जु-(न)संख्याकभुजक्षेत्रयोः क्रमेण परिधी किल (प) (पा) इति स्यातां फले च (फ) (फा) इति स्याताम्।

$$\text{तदा } \frac{\text{प}}{\text{पा}} = \frac{२\text{नव}\,.\,\text{ज्या}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}}{२\text{नव}\,.\,\text{स्प}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}} = \text{कोज्या}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}$$

$$\text{तथा } \frac{\text{फ}}{\text{फा}} = \frac{\text{नव}^{२}\,.\,\text{ज्या}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\,\text{कोज्या}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}}{\text{नव}^{२}\,.\,\text{स्प}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}} = \text{कोज्या}^{२}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}$$

अत्र यदि न = ∞ स्यात्

$$\text{तदा } \frac{\text{प}}{\text{पा}} = \text{कोज्या}\,\frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या}\,०^\circ = १$$

$$\text{तथा } \frac{\text{फ}}{\text{फा}} = \text{कोज्या}^{२}\,\frac{१८०^\circ}{\infty}\,\text{कोज्या}^{२}\,०^\circ = १$$

$\therefore$ प = पा तथा फ = फा भवेत्।

❀ इदमेव क्षेत्रमितेर्द्वादशाध्यायस्य १–२ प्रतिज्ञाभ्यामपि सम्पद्यते।

अत एव वृतान्तर्बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रयोर्भुजसंख्या यथायथाऽधिका स्यात् तथातथा ते क्षेत्रे प्रत्येकं तद्वृत्तक्षेत्रासन्ने भवेताम् । तथा च भुज-संख्याया आनन्त्ये ते वृत्तक्षेत्रे भूत्वा सर्वांशैर्मिथो मिलेताम् । अत एव तत्तद्वृत्तपरिधिस्तत्तद्वृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति तत्तद्वृत्तफलं च तत्तद्वृत्तव्यासार्धवर्गात् समानगुणं भवतीत्यवगम्यते ।

५२ । अथ वृत्तक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयनयुक्तिप्रकारः ।

(१) तत्र किल वृत्तान्तर्गतबहुभुजक्षेत्रपरिधिः $=$ २नव.ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ ।

अत्र यथायथा न-संख्याऽधिका स्यात् तथातथाऽयं परिधिर्वृत्त-परिधेरासन्नतरो भवेदित्यत एव पूर्वम् $\left(\text{ज्या}\frac{१८०^\circ}{न}\right)$ अस्य तथा मानं साध्यते यथाऽत्र न-संख्या महती स्यात् ।

तथा हि ∵ (२४) प्रक्रमस्थात् (फा) तः

$$\text{कोज्या}\frac{आ}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१ + \text{कोज्या}आ} \;*$$

$$\therefore \quad \text{कोज्या}\frac{९०^\circ}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{एवम् कोज्या}\frac{९०^\circ}{२^२} = \frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}$$

---

* अत्र यदि आ $= ९०^\circ, \frac{९०^\circ}{२}, \frac{९०^\circ}{२^२}$ इत्यादि कल्प्यते तदाऽधः-स्थितस्वरूपाणि जायन्ते ।

$$\text{कोज्या}\,\frac{९०^\circ}{२^३}=\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{१+\frac{१}{\sqrt{२}}}}$$

एवमग्रेऽपि

अनया युक्त्या कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^प}$ अस्य तथा मानं गणयितुं शक्यते यथाऽत्र (प) संख्या महती स्यात् । तथा च यदि न $= २^प$ कल्प्येत

तदा ज्या $\frac{१८०^\circ}{न} = २$कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^प}\cdot$ ज्या $\frac{९०^\circ}{२^प}$

$= २$कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^प}\sqrt{१-\text{कोज्या}^२\frac{९०^\circ}{२^प}}$ आसन्नं स्यात् ।

एवमानीतं ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ अस्य मानं न-संख्यया गुणितं सत् ३.१४१५९२६५ ··· ··· ··· इत्यादि भवति । इदम् * π अनेन द्योत्यं स्यात् । तथा सति वृत्तपरिधिः $= २\pi$व ।

(२) अनन्तरोक्तप्रक्रमे सङ्केतितयोः (प) (फ) वर्णयोः क्रमेण माने २नव. ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$, नव². ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$,कोज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ ।

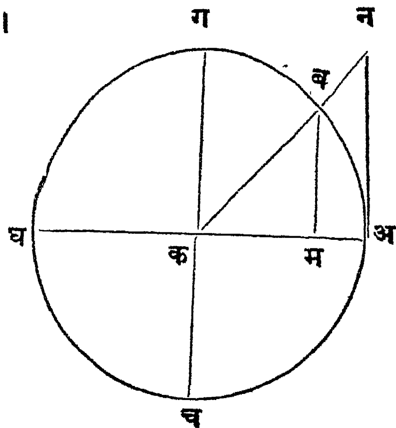
$$\frac{फ}{प}=\frac{\text{नव}^२.\ \text{ज्या}\,\frac{१८०^\circ}{न}.\ \text{कोज्या}\,\frac{१८०^\circ}{न}}{२\text{नव}\ .\ \text{ज्या}\,\frac{१८०^\circ}{न}}=\frac{१}{२}\,\text{व.कोज्या}\,\frac{१८०^\circ}{न}\ ।$$

---

* π इदं 'ग्रीक'-वर्णमालायां 'पाइ' इत्युच्चार्यते ।

अथ वृत्तरूपे बहुभुजक्षेत्रे न $=\infty$ । अत एव कोज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$

$=$ कोज्या $०^\circ = १$ ।



$\therefore$ वृत्ते $\frac{फ}{प} = \frac{१}{२}$व. $\because$ फ $= \frac{१}{२}$व.प ।

अथ च पूर्वसिद्धम् प $=$ २πव
$\therefore$ फ $= \pi$व^२ ।

(३) एवम् अकब-वृत्तखण्डस्यापि फलं शीघ्रमवगम्यते । (पार्श्वस्थं क्षेत्रं द्रष्टव्यम्) तथा हि—अत्र किल अब-चापदैर्घ्यम् $=$ अ । व्यासार्धम् $=$ व, तथा च क्षेत्रमितेः षष्ठाध्यायस्य त्रयस्त्रिंशप्रतिज्ञया—

अकब—वृत्तखण्डम् : अगघच ⊙ : : अ : २πव

$$\therefore \text{ अकब—वृत्तखण्डम्} = \frac{\text{अ}}{२\pi\text{व}} \times \text{अगघच} \odot$$

$$= \frac{\text{अ}}{२\pi\text{व}} \times \pi\text{व}^२ = \frac{१}{२}\text{अव} ।$$

(४) अब—चापस्य बम—जीवा, अन—स्पर्शरेखा स्यात् । तत्र यदि अब—रेखा क्रियते तदा अकब—वृत्तखण्डम्, अकब—त्रिभुजादधिकम् अकन—त्रिभुजाच्चोनं भवेत् ।

$\because$ $\frac{१}{२}$अक . अब $>$ $\frac{१}{२}$अक . बम $<$ $\frac{१}{२}$अक . अन

$\therefore$ अब $>$ बम $<$ अन ।

अतः अकब—लघुकोणसंमुखचापम् अब—स्वज्यातोऽधिकं स्वस्पर्शरेखातश्च न्यूनं भवति तदेव विलिख्य प्रदर्श्यते

अ > ज्याअ < स्पअ।

तत्र यदि अ = ० स्यात् तर्हि

$$\frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{व}} = \frac{\text{कोज्या}0^\circ}{\text{व}} = \frac{\text{व}}{\text{व}} = १$$

अस्मादिदमनुमीयते। चापस्यात्यन्तह्रासे तज्ज्यास्पर्शरेखे मिथस्तुल्ये भवतः। अत एव ते प्रत्येकं स्वचापेन समे स्याताम्।

तथा $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{अ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{अ}} = १$, एवं सिध्यति।

५३। रूपव्यासार्धे चापस्य या जीवादयस्ता एव तच्चापसम्बन्धिकोणस्यापि भवन्तीति पूर्वं प्रदर्शितम्। (१४ प्र. द्र.) तत्र यच्चापदैर्घ्यमानं तदेव तत्सम्बन्धिकोणस्य स्यात् तच्च तस्य कोणस्य चापीयं मानमुच्यते। बीजक्रियया सम्पाद्यमाने त्रिकोणमितिगणिते कोणस्य चापीयमानमेव गृह्यते।

अथ यदि (व) व्यासार्धे (२πव) अयं पूर्वसिद्धः परिधिस्तदा रूपव्यासार्धे क इत्यनुपातेनाप्तं (२π) रूपव्यासार्धे परिधिदैर्घ्यम्।

अतः π = * ३. १४१५९२६५ इत्यादिकं रूपव्यासार्धेऽर्धपरिधिमानं समकोणद्वयस्य चापीयं मानं स्यात्।

तथा च यस्य कोणस्य चापीयं मानं रूपं स्यात् तस्य

$$\frac{१८०^\circ}{३.१४१५९ इ.} = ५७.२९५७ इ० = ५७^\circ । १७' । ४४''. ६$$ इत्याद्यंशादिमानं भवेत्। अस्मान्निर्दिष्टकोणस्यांशादिमानाच्च तत्कोणसंबन्धिचापदैर्घ्यावगमः सुगमः।

---

* एतदर्थं लीलावत्यन्ते श्रीमद्गुरुकृता टिप्पण्यवलोक्या।

अथ

परीक्षार्थिजनोपकारार्थं

(२९) प्रक्रमोक्तप्रश्नानामुत्तराणि ।

(१) $\text{ज्याअ}^2 = १ - \text{कोज्या}^2\text{अ} \therefore \text{ज्याअ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}$ ।

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ.कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \text{कोज्याअ.स्पअ} \text{ ।}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}} \text{ ।}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोस्प}} \text{ ।}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \dfrac{१}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^2\text{अ}}} \text{ ।}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्याअ}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ . ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्याअ . कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} \text{।}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ} - १}}{\text{छेअ}} \text{।}$$

(२) $$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} \text{।}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{१}{\text{छेअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}} \text{।}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ. कोज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}} \text{।}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \text{ज्याअ.कोस्पअ ।}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१+\text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ}-१}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

(३) $$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१-\text{ज्या}^२\text{अ}}} \text{ ।}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{१-\text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ}-१}} \text{ ।}$$

$$\text{स्पअ}=\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}=\frac{\text{ज्याअ}\,.\,\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}\times\text{ज्याअ}}=\frac{\text{ज्याअ}}{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}\times\frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}}$$

$$=\frac{\text{ज्याअ}\times\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}}\text{ ।}$$

$$\text{स्पअ}=\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}=\frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}\times\dfrac{\text{१}}{\text{ज्याअ}}}=\frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}}\text{ ।}$$

$$\text{स्पअ}=\frac{\text{ज्याअ}\,.\,\text{ज्याअ}.\,\text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}.\text{ज्याअ}.\text{कोज्याअ}}=\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}.\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}\times\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}$$

$$=\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}.\text{कोस्प}^{\text{२}}\text{अ}}\text{ ।}$$

$$\text{स्पअ}=\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}=\frac{\sqrt{\text{१}-\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{अ}}}{\text{१}-\text{उअ}}=\frac{\sqrt{\text{१}-(\text{१}-\text{उअ})^{\text{२}}}}{\text{१}-\text{उअ}}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{२उअ}-\text{उ}^{\text{२}}\text{अ}}}{\text{१}-\text{उअ}}\text{ ।}$$

(४) $\text{कोस्पअ}=\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$ । इतोऽग्रे पूर्वोक्तस्पर्शरेखास्वरूपे बहुधा हर-भाज्ययोः परिवर्त्तनादेव सर्वमुपपद्यते ।

(५) $\text{छेअ}=\dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}=\sqrt{\text{१}+\text{स्प}^{\text{२}}\text{अ}}$ ।

$$\text{छेअ}=\frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}=\frac{\text{ज्याअ}\times\text{१}}{\text{कोज्याअ}\times\text{ज्याअ}}=\frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}}\text{ ।}$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} \times \text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछेअ}^{२} - १}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{१}}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \text{स्पअ} \times \text{कोछेअ} \text{ ।}$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{१}}{\text{१}-\text{उअ}} \text{ ।}$$

(६) $$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \sqrt{\text{१} + \text{कोस्प}^{\text{२}}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{१}}{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ} \times \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ} \times \text{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{ज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{छेअ}}{\text{ज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{अ}}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\sqrt{\text{१} + \text{स्प}^{\text{२}}\text{अ}}}{\text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\sqrt{\text{छे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्पअ} \times \text{छेअ} \text{ ।}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{१}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{अ}}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} - (\text{१} - \text{उअ})^{\text{२}}}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{२उअ} - \text{उ}^{\text{२}}\text{अ}}} \text{ ।}$$

(७) $\text{उअ} = \text{१} - \text{कोज्याअ}$ ।

$$\text{उअ} = \text{१} - \text{कोज्याअ} = \text{१} - \sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^{\text{२}}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{उअ} = \text{१} - \text{कोज्याअ} = \text{१} - \frac{\text{१}}{\frac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}} = \text{१} - \frac{\text{१}}{\text{छेअ}}$$

$$= \text{१} - \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} + \text{स्प}^{\text{२}}\text{अ}}} \text{ ।}$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= १ - \frac{१ \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}}$$

$$= १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}} ।$$



अथ

(३०) प्रक्रमोक्तद्विगुणकोणस्य ज्यादिस्वरूपाणां वैशद्यम् ।

(१) $\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ} . \text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$

$$= \frac{२\text{ज्या}^२\text{अ}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{स्पअ}} ।$$

$$ज्या२अ = २ज्याअ \,.\, कोज्याअ = \frac{२ज्याअ.कोज्याअ.कोज्याअ}{कोज्याअ}$$

$$= \frac{\frac{२कोज्या^{२}अ}{कोज्याअ}}{ज्याअ} = \frac{२कोज्या^{२}अ}{कोस्पअ} ।$$

$$ज्या२अ = २ज्याअ.कोज्याअ = \frac{\frac{२ज्याअ}{१}}{कोज्याअ} = \frac{२ज्याअ}{छेअ} ।$$

$$ज्या२अ = २ज्याअ.कोज्याअ = \frac{\frac{२कोज्याअ}{१}}{ज्याअ} = \frac{२कोज्याअ}{कोछेअ} ।$$

$$ज्या२अ = २ज्याअ.कोज्याअ = \frac{२ज्याअ.कोज्याअ.कोज्याअ}{कोज्याअ}$$

$$= \frac{२ज्याअ}{कोज्याअ \times \frac{१}{कोज्या^{२}अ}} = \frac{२स्पअ}{छे^{२}अ} ।$$

$$ज्या२अ = \frac{२स्पअ}{छे^{२}अ} = \frac{२स्पअ}{\sqrt{१+स्प^{२}अ}} ।$$

$$ज्या२अ = २ज्याअ.कोज्याअ = \frac{२}{\frac{१}{ज्याअ.कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२}{\frac{\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{२}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{२}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} \text{।}$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ . कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ.ज्याअ.कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^२\text{अ}} \text{।}$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^२\text{अ}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{१+\text{कोस्प}^२\text{अ}} \text{।}$$

(२) $\text{कोज्या}२\text{अ} = \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = १ - \text{ज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}$

$= १ - २\text{ज्या}^२\text{अ}$ ।

$\text{कोज्या}२\text{अ} = \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = \text{कोज्या}^२\text{अ} - (१ - \text{कोज्या}^२\text{अ})$

$= \text{कोज्या}^२\text{अ} - १ + \text{कोज्या}^२\text{अ} = २\text{कोज्या}^२\text{अ} - १$ ।

$$\text{कोज्या}२\text{अ} = \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = \frac{१ - \frac{\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}}$$

$$= \frac{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{छे}^२\text{अ}} = \frac{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}{१ + \text{स्प}^२\text{अ}} \text{।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ} = \frac{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ. ज्याअ}}} = \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ} = \frac{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} - १}{\dfrac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} - १}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} + १} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ} = २\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १$$

$$= \frac{\dfrac{२\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{२ - \dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{२ - \text{छे}^{२}\text{अ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = २\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १ = \frac{\dfrac{२\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{२कोज्याअ - \frac{१}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ} ।$$

$$कोज्या२अ = कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ = १ - २ज्या^{२}अ = \frac{\frac{१ - २ज्या^{२}अ}{ज्या^{२}अ}}{\frac{१}{ज्या^{२}अ}}$$

$$= \frac{कोछे^{२}अ - २}{कोछे^{२}अ} ।$$

$$कोज्या२अ = २कोज्या^{२}अ - १ = \frac{\frac{२कोज्या^{२}अ - १}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२कोज्याअ - \frac{१}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ} ।$$

$$कोज्या२अ = १ - २ज्या^{२}अ = \frac{\frac{१ - २ज्या^{२}अ}{ज्या^{२}अ}}{\frac{१}{ज्या^{२}अ}} = \frac{\frac{१}{ज्या^{२}अ} - २}{\frac{१}{ज्या^{२}अ}}$$

$$= \frac{कोछे^{२}अ - २}{कोछे^{२}अ} ।$$

$$\text{कोज्या२अ} = १ - \text{२ज्या}^{२}\text{अ} = \frac{\dfrac{१-\text{२ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ} - \text{२ज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

(२) $$\text{स्प२अ} = \frac{\text{ज्या२अ}}{\text{कोज्या२अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{१ - \dfrac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$$

$$= \frac{\text{२स्पअ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{२}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ . कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{२}{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{१ - \text{२ज्या}^{२}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १} ।$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} - १}$$

$$= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} - १} ।$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{२ - \dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{२ - \text{छे}^{२}\text{अ}} ।$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{१ - \text{२ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{१ - \text{२ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} - २}$$

$$= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ} - २} ।$$

(४) $कोस्पर२अ = \frac{कोज्या२अ}{ज्या२अ} = \frac{कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ}{२कोज्याअ \,.\, ज्याअ}$ ।

एवं स्पष्टमवगम्यते यत् स्पर्शरेखाया हरभाज्ययोः परिवर्त्तनात् कोटिस्पर्शरेखा भवत्यतः पूर्वकृतस्पर्शरेखास्वरूपाणां हरभाज्ययोः परिवर्त्तनादेव सर्वेषां कोटिस्पर्शरेखास्वरूपाणां सिद्धिः सुखेन संपाद्या ।

$$(५)\; छे२अ = \frac{१}{कोज्या२अ} = \frac{१}{कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ} = \frac{१}{२कोज्या^{२}अ - १}$$

$$= \frac{\frac{१}{कोज्या^{२}अ}}{\frac{२कोज्या^{२}अ - १}{कोज्या^{२}अ}} = \frac{छे^{२}अ}{२ - \frac{१}{कोज्या^{२}अ}} = \frac{छे^{२}अ}{२ - छे^{२}अ} \;।$$

$$छे२अ = \frac{१}{२कोज्या^{२}अ - १} = \frac{\frac{१}{कोज्याअ}}{\frac{२कोज्या^{२}अ - १}{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{छेअ}{२कोज्याअ - \frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{छेअ}{२कोज्याअ - छेअ} \;।$$

$छे२अ = \frac{१}{२कोज्या^{२}अ - १} = \frac{१}{१ - २ज्या^{२}अ}$ एते तु पूर्वकृत-वैशद्यादतिविशदे ।

$$छे२अ = \frac{१}{कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ} = \frac{ज्या^{२}अ + ज्या^{२}अ}{कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{१ + \dfrac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{१ - \dfrac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}$$

$$= \frac{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}{१ - \text{स्प}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} . \text{ज्याअ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} . \text{ज्याअ}}} = \frac{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} + १}{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - १}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} + १}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - १} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}}}{\dfrac{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\dfrac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - २} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\text{कोछे}^२\text{अ} - २} \text{ ।}$$

(६) $$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{ज्या}२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \tfrac{१}{२} \frac{१ \times १}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \tfrac{१}{२}\, \text{छेअ} \times \text{कोछेअ} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{ज्या}२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{ज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{२\text{कोज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\dfrac{२\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{स्पअ} \times \text{कोज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{छे}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} = \frac{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \,.\, \text{कोज्याअ}} = \frac{१ \times १}{१ \times २\text{ज्याअ}.\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{२\text{ज्याअ} \,.\, \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{२\text{कोज्याअ} \,.\, \text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{२} = \frac{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}}{२} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \,.\, \text{कोज्याअ}} = \frac{१}{२\text{ज्या}^{२}\text{अ} \cdot \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{२\,\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोछे}^{२}\text{अ}}{२\text{कोस्पअ}} = \frac{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{अ}}{२\text{कोस्पअ}} \text{ ।}$$

(७) $\text{उ}२\text{अ} = १ - \text{कोज्या}२\text{अ} = १ - (\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ})$

$= १ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ} = २\text{ज्या}^{२}\text{अ}$ ।

$\text{उ}२\text{अ} = १ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}$

$= १ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ} + १ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ}$

$= २ - २\,\text{कोज्या}^{२}\text{अ}$ ।

$$\text{उ}२\text{अ} = २\text{ज्या}^{२}\text{अ} = \frac{\frac{२\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{२\text{स्प}^{२}\text{अ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}} = \frac{२\text{स्प}^{२}\text{अ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{उ२अ} = \text{२ज्या}^{2}\text{अ} = \frac{\dfrac{\text{२ज्या}^{2}\text{अ}}{\text{ज्याअ . कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ . कोज्याअ}}} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१ \times १}{१ \times \text{ज्याअ.कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{२स्पअ}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ . कोज्याअ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{\dfrac{\text{ज्या}^{2}\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}} + \dfrac{\text{कोज्या}^{2}\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{२स्पअ}}{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{उ२अ} = \text{२ज्या}^{2}\text{अ} = \frac{\dfrac{२}{१}}{\dfrac{}{\text{ज्या}^{2}\text{अ}}} = \frac{२}{\text{कोछे}^{2}\text{अ}} = \frac{२}{१ + \text{कोस्प}^{2}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{उ२अ} = \text{२ज्या}^{2}\text{अ} = \frac{\text{२ज्याअ}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

$$\text{उ२अ} = \text{२ज्या}^{2}\text{अ} = \frac{\dfrac{\text{२ज्या}^{2}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{2}\text{अ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्या}^{2}\text{अ}}} = \frac{\text{२स्प}^{2}\text{अ}}{\text{छे}^{2}\text{अ}} = २\frac{\text{स्प}^{2}\text{अ}}{\text{छे}^{2}\text{अ}}$$

$$= २\frac{\text{छे}^{2}\text{अ} - १}{\text{छे}^{2}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{छ}२\text{अ} = २\text{ज्या}^{२}\text{अ} = \frac{\dfrac{२\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २\frac{\dfrac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २\frac{\dfrac{१ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २\frac{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}} - \text{कोज्याअ}}{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २\frac{\text{छेअ} - \text{कोज्याअ}}{\text{छेअ}}\ ।$$



अथ

३९पृष्ठस्थ—३२प्रक्रमोक्तसारण्युत्पादनप्रकारश्चात्रैवान्ते ३३प्रक्रमस्यापि निवेशः ।

(१) तत्रादावेकस्याः कलाया ज्याकोटिज्यानयनम् ।

ज्याअ $= \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१ + \text{ज्या}२\text{अ}} - \sqrt{१ - \text{ज्या}२\text{अ}} \right\}$। अत्र यदि

२अ $= १५^\circ$ अत एव ज्या२अ $= \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} =$ *·२५८८१९०४५१०२, इत्यादि ।

तथा ज्या $\frac{१५^\circ}{२} =$ † ·१३०५२६१९२२० इत्यादि = $\text{ज}_१$ ।

पुनर्यदि $\text{ज}_१$ अनेन २अ इदमुत्थाप्येत तदा

---

* अथावर्गाङ्कानां नवीनगणितरीत्या मूलानयनम् ।

यथा $\sqrt{२} = १ +$ शेषावयवाः । अत्रावयवा 'दशमलव'-स्य नियमानुसारेण २४) १०० (४

९६

२८१) ४०० (१

२८१

२८२४) ११९०० (४

११२९६

.... ।

एवम् $\sqrt{२} =$ १·४१४......... इत्यादि ।

एवम् $\sqrt{३} =$ १·७३२......... इत्यादि ।

अतः ज्या १५ $= \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} =$ ·२५८८......... इत्यादि ।

† 'क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलात्' 'त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं' वाऽर्धांशज्येत्यतः ।

$$\text{ज्या}\ \frac{१५^\circ}{२^२} = \cdot ०६५४०३१२९२३० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२ \text{ ।}$$

एवं मुहुरर्धांशज्यायां गृहीतायाम्

$$\text{ज्या}\ \frac{१५^\circ}{२^९} = \cdot ०००५११३२६९०१ \text{ इत्यादि} = \text{ज}_९$$

$$\text{ज्या}\ \frac{१५^\circ}{२^{१०}} = \cdot ०००२५५६६३४५० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_{१०}$$

एवमुत्पद्यते ।

अत्र $\text{ज}_{१०}$ इयं $\text{ज}_९$ अस्या अर्धेन समं भवतीति स्पष्टं दृश्यते । अनेनेदमनुमीयते यत् सूक्ष्मकोणयोरेकस्य यत्संख्यापूरणोऽंशस्तज्ज्या भवति तत्संख्यापूरणोऽंशोऽपरकोणस्यापि स्वल्पान्तरात् तज्ज्या भवतीति

$$\therefore \frac{१५ \times ६०}{२^{१०}} : \text{ज्या}\ \frac{१५^\circ}{२^{१०}} :: १' : \text{ज्या}\ १'$$

$$\therefore \text{ज्या}\ १' = \text{ज्या}\ \frac{१५^\circ}{२^{१०}} \times \frac{२^{१०}}{१५ \times ६०}$$

$$= \cdot ०००२५५६६३४५० \ldots \times \frac{२५६}{२२५} = \cdot ०२९०८८८१९२ \ldots\ldots$$

$$\text{एवम्} \because \text{कोज्याअ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$\therefore \text{कोज्या}\ १' = \sqrt{१ - (\cdot ०२९०८८८१९२ \ldots)^२}$$

$$= \cdot ९९९९९९९५७६९२ \ldots \text{ ।}$$

(२) द्वित्र्यादीनां कलानामंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\text{ज्या}\ (\text{अ} + \text{क}) =^* २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या}\ (\text{अ} - \text{क})$$

---

* अत्र २० प्रक्रमावलोकनतः स्फुटम् ।

$= *$ २ज्याअ $\left\{ १ - २\text{ज्या}^{२}\frac{१}{२}\text{क} \right\}$ – ज्या (अ – क)

= २ज्याअ – ज्या (अ – क) – ४ ज्याअ . ज्या$^{२}\frac{१}{२}$क

अतो यदा (क) स्थाने १′ तथा (अ) स्थाने १′,२′,३′ इत्याद्याः स्युस्तदा

ज्या२′ = २ज्या१′ + ज्या (१′ – १′) – ४ ज्या १′ × ज्या^{२}३०″।

ज्या३′ = २ज्या२′ + ज्या (२′ – १′) – ४ ज्या २′ × ज्या^{२}३०″।

ज्या४′ = २ज्या३′ + ज्या (३′ – १′) – ४ ज्या ३′ × ज्या^{२}३०″।

इत्यादि।

एकस्याः कलाया ज्याया अवगमादत्र ४ज्या^{२}३०″ एतन्मानं सुखेन ज्ञायते तत उक्तयुक्त्या द्वित्र्यादिकलानां ज्ञानं सुगमम्।

अनयैव युक्त्यैकस्यांशस्य त्रिंशतः कलानां च जीवां विज्ञाय द्वित्र्याद्यंशानां जीवाः सुखेन ज्ञातुं शक्याः।

एवं ∵ कोज्या (अ + क)=२कोज्याअ . कोज्याक – कोज्या (अ – क)

= २कोज्याअ (१ – २ज्या$^{२}\frac{१}{२}$क) – कोज्या (अ – क)

= २कोज्याअ – कोज्या (अ – क) – ४कोज्याअ . ज्या$^{२}\frac{१}{२}$क।

अतो यद्यत्र क = १′, तथा अ = एकद्वित्र्यादिकलाः स्युस्तदा

कोज्या २′= २कोज्या१′–कोज्या (१′ – १′)– ४कोज्या१′ × ज्या^{२}३०″।

कोज्या ३′= २कोज्या२′–कोज्या (२′ – १′)– ४कोज्या२′ × ज्या^{२}३०″।

कोज्या ४′= २कोज्या३′–कोज्या (३′ – १′)– ४कोज्या३′ × ज्या^{२}३०″।

इत्यादि।

अतोऽपि ४ज्या^{२}३०″ एतन्मानज्ञानात् द्वित्र्यादिकलानां कोटिज्यावगमः सुगमः। एवमेकस्यांशस्य कोटिज्यायां त्रिंशतः कलानां च जीवायां ज्ञातायां द्वित्र्यादिकांशानामपि कोटिज्याज्ञानं सुलभम्।

---

* अत्र २४ प्रक्रमतः ∵ २ज्या$^{२}\frac{१}{२}$ क = १– कोज्याक

∴ कोज्याक = १– २ज्या$^{२}\frac{१}{२}$ क

(३) द्वित्र्याद्यंशानां प्रकारान्तरेण ज्याकोटिज्यानयनम् ।

पूर्वम् $\left.\begin{array}{l} \text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्या}\text{अ} \cdot \text{कोज्या}\text{अ} \\ \text{कोज्या}२\text{अ} = २\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १ \end{array}\right\}$ आभ्यामंशद्वयस्य ज्याकोटिज्ये विज्ञाय

$$\text{ततः ज्या}(\text{अ}+\text{क}) = {}^{*}\frac{(\text{ज्या}\text{अ}+\text{ज्या}\text{क})(\text{ज्या}\text{अ}-\text{ज्या}\text{क})}{\text{ज्या}(\text{अ}-\text{क})}$$

$$\text{कोज्या}(\text{अ}+\text{क}) = \frac{(\text{कोज्या}\text{अ}+\text{ज्या}\text{क})(\text{कोज्या}\text{अ}-\text{ज्या}\text{क})}{\text{कोज्या}(\text{अ}-\text{क})}$$

आभ्यां त्र्यादीनामंशानां ज्याकोटिज्याज्ञानं सुगमम् ।

$$\text{तथा हि ज्या}३^{\circ} = \frac{(\text{ज्या}२^{\circ}+\text{ज्या}१^{\circ})(\text{ज्या}२^{\circ}-\text{ज्या}१^{\circ})}{\text{ज्या}१^{\circ}}$$

$$\text{ज्या}४^{\circ} = \frac{(\text{ज्या}३^{\circ}+\text{ज्या}१^{\circ})(\text{ज्या}३^{\circ}-\text{ज्या}१^{\circ})}{\text{ज्या}२^{\circ}} \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या}३^{\circ} = \frac{(\text{कोज्या}२^{\circ}+\text{ज्या}१^{\circ})(\text{कोज्या}२^{\circ}-\text{ज्या}१^{\circ})}{\text{कोज्या}१^{\circ}}$$

$$\text{कोज्या}४^{\circ} = \frac{(\text{कोज्या}३^{\circ}+\text{ज्या}१^{\circ})(\text{कोज्या}३^{\circ}-\text{ज्या}१^{\circ})}{\text{कोज्या}२^{\circ}} \text{ इत्यादि ।}$$

अनयैव युक्त्या सैकद्व्यादिकलानामेकद्वित्र्याद्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमः सुगमः । तथाहि–

$$\text{ज्या}(१^{\circ},१') = \frac{(\text{ज्या}१^{\circ}+\text{ज्या}१')(\text{ज्या}१^{\circ}-\text{ज्या}१')}{\text{ज्या}५९'}$$

$$\text{ज्या}(१^{\circ},२') = \frac{(\text{ज्या}१^{\circ}+\text{ज्या}२')(\text{ज्या}१^{\circ}-\text{ज्या}१')}{\text{ज्या}५८'} \text{ इत्यादि ।}$$

---

* एतदर्थं २० प्रक्रमो द्रष्टव्यः ।

$$\text{कोज्या}\,(१^\circ, १') = \frac{(\text{कोज्या}\,१^\circ + \text{ज्या}\,१')\,(\text{कोज्या}\,१^\circ - \text{ज्या}\,१')}{\text{कोज्या}\,५९}$$

$$\text{कोज्या}\,(१^\circ, २') = \frac{(\text{कोज्या}\,१^\circ + \text{ज्या}\,२')\,(\text{कोज्या}\,१^\circ - \text{ज्या}\,२')}{\text{कोज्या}\,५८'}$$ इत्यादि ।

(४) एवमनेन विधिना त्रिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्ये प्रसाध्याग्रे

ज्या (अ + क) = २ज्याअ . कोज्याक—ज्या (अ—क)

कोज्या (अ + क) = कोज्या (अ – क) – ज्याअ · ज्याक

एतदाधारतः सुखेन ज्याकोटिज्ये अवगन्तव्ये ।

तथा हि, यदि अ= ३०° । क=एकद्वित्र्यादिकलास्तदा २ज्याअ=१' ।

$\therefore$ ज्या (३०° । १') = कोज्या १'– ज्या (२९° । ५९') ।

ज्या (३०° । २') = कोज्या २'– ज्या (२९° । ५८') इत्यादि ।

कोज्या (३०° । १') = कोज्या (२९° । ५९') – ज्या १'

कोज्या (३०° । २') – कोज्या (२९° । ५८')– ज्या२', इत्यादि ।

एवमिह केवलं व्यवकलनेन ज्याकोटिज्यावगमः ।

(५) एवं पञ्चचत्वारिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्याः साध्याः । तदनन्तरम्–

$\because$ ज्या (४५° + अ) = कोज्या (४५° – अ)

कोज्या (४५° + अ) = ज्या (४५° – अ)

अतो या एव ४५°पर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याः कोटिज्याश्च ता एव प्रातिलोम्येन पञ्चचत्वारिंशदंशाधिकानां सकलानमंशानां कोटिज्या ज्याश्च भवन्ति ।

एवं सर्वेषां नवतेरंशानां ज्याकोटिज्यावगमात् तत्सारणीसंपादनं सुशकम् ।

(६) यतः ज्या ९०° + अ) = + कोज्याअ ।

कोज्या (९०°+अ) = – ज्याअ

ज्या (१८०°+अ)= – ज्याअ । कोज्या (१८०°+अ) = – कोज्याअ

ज्या (२७०°+अ)= − कोज्याअ। कोज्या (२७०°+अ) = + ज्याअ

अतो नवत्यंशपर्यन्तानामंशानां ज्याकोटिज्यासारणीत एव नवत्यधिकानामप्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमः सुशकः।

(७) स्पर्शरेखाणां कोटिस्पर्शरेखाणां च सारणीसंपादनम्

$$स्पअ = \frac{ज्याअ}{कोज्याअ} \text{ । } कोस्पअ = \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}$$

एतदाधारतः सुशकम्।

(८) एवं छेदनरेखाणां कोटिच्छेदनरेखाणां चोत्क्रमज्यानां कोट्युत्क्रमज्यानां च सारणी—

$$छेअ = \frac{१}{कोज्याअ} \text{ । } कोछेअ = \frac{१}{ज्याअ} \text{ । } उअ = १ - कोज्याअ$$

$$कोउअ = १ - ज्याअ$$

आभ्यश्चतसृभ्यस्तत्तदुन्मितिभ्यः संपादयितुं सुशका।

इति कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः।

३३। पूर्वसाधितज्यादीनां गुणनभजनाद्यपेक्ष्य तत्प्रघातमापकानां गुणनभजनादिकेऽत्यल्पायासः स्यात् किन्तु कोणीयज्यादीनां प्राय एकाल्पत्वात् तत्प्रघातप्रमापका ऋणगता भवन्त्यतः कोणीयज्याद्याः १०^१० एतद्व्यासार्धपरिणताः कृत्वा तादृशानां प्रघातमापकाः गणितलाघवाय सारण्यां लिख्यन्ते।

त्रिकोणमितिसहायकं नवीनगणितम्।

इह त्रिकोणमितौ पाश्चात्यगणितसंकेतानभिज्ञानां बहुधा प्रघातमापकाङ्कविचारे बुद्धिप्रागल्भ्यं न जायतेऽतः कतिचन तत्संकेतविषयाः प्रदर्श्यन्ते।

घातवृद्धिः = Involution.

(१) यदि कश्चिदङ्कस्तेनैव तद्वर्गेणेत्यादिभिर्गुण्यते तदा स तद्घाताङ्कपर्यन्तं वर्ध्यत इत्यतः सा घातवृद्धिरित्युच्यते।

यथा— $अ \times अ = अ^{२}$*, अत्र २ इति द्विघातः । एवम् $अ \times अ \times अ = अ \times अ^{२} = अ^{३}$, ३ इति त्रिघातः । एवं यथेष्टं भवितुमर्हति ।

(२) घातवृद्धौ धनर्णत्वं तद्घाताङ्कत एवावगम्यतेऽर्थाद् घाताङ्के विषमे तथा तदङ्कस्यर्णत्वे तत्फलमृणमन्यथा धनम् ।

यथा— $-अ \times -अ \times -अ = -अ^{३}$,

$-अ \times -अ \times -अ \times -अ = अ^{४}$, एवं सर्वत्र ।

(३) द्वयोर्घातवर्धिताङ्कयोर्घाते क्रियमाणे तदङ्कस्योपरि द्वयोर्घातमापकाङ्कयोर्योगाङ्कदानेन वर्धिताङ्कघातो भवति ।

यथा— $अ^{२} \times अ^{२} = अ^{२+२} = अ^{४}$,

$अ^{२} \times अ^{३} = अ^{२+३} = अ^{५}$, एवमन्यदपि ।

(४) वर्धिताङ्कभागहारे भाज्यहारयोर्घाताङ्कवियोगाल्लब्धिः संपद्यते ।

यथा— $\frac{अ^{३}}{अ^{२}} = अ^{३-२} = अ^{१} = अ$ ।

$$\frac{अ^{२}}{अ^{३}} = अ^{२-३} = अ^{-२} = \frac{१}{अ}$$ ।

$$\frac{अ^{२}}{अ^{२}} = अ^{२-२} = अ^{०} = १$$ ।

एवम् $\frac{अ}{अ} = \frac{अ^{१}}{अ^{१}} = अ^{१-१} = अ^{०} = १$ ।

$\because \frac{अ^{३}}{अ^{२}} = \frac{अ \times अ \times अ}{अ \times अ} = अ \quad \therefore अ^{१} = अ$ ।

---

* अ-कारस्योपरि द्वित्र्याद्यङ्काः स्थाप्यन्ते ये घातज्ञापका वा घातमापकाः (Powers) इत्युच्यन्ते ।

$$\because \quad \frac{अ^{२}}{अ^{३}} = \frac{अ \times अ}{अ \times अ \times अ} = \frac{१}{अ} \therefore अ^{-१} = \frac{१}{अ} ।$$

$$\because \quad \frac{अ^{२}}{अ^{२}} = \frac{अ \times अ}{अ \times अ} = १ \qquad \therefore अ^{०} = १ ।$$

(५) उक्तनियमाननुसृत्यैव कतिचनान्ये विषया अपि तत्प्रयोजनकाः प्रदर्श्यन्ते ।

यथा— $अ^{५}$, इत्यत्र घाताङ्को ५, ६, ७.........इत्यादि यथेष्टं भवितुमर्हति, तत्र यदि ५, ६, ७.........न-पर्यन्तं भवेत् तदा $अ^{५} \times अ^{६} \times अ^{७}$...........$अ^{न}$ । अत्रैव यदि कल्प्यते ५ = न, ६ = म, ७ स, तदा $अ^{५} \times अ^{६} \times अ^{७} = अ^{न} \times अ^{म} \times अ^{स} = अ^{न + म + स}$ ।

$$एवमेव \quad \frac{अ^{५} \times अ^{६}}{अ^{७}} = \frac{अ^{न} \times अ^{म}}{अ^{स}} = \frac{अ^{न + म}}{अ^{स}} = अ^{न+म-स} ।$$

$$एवम् \frac{अ^{न}}{अ^{म}} = अ^{न-म} = \frac{१}{अ^{न-म}} ।$$

(६) घातज्ञापकाङ्कवैचित्र्यं प्रदर्श्यते ।

यथा— $अ = अ^{१}$, भिन्नयोगक्रमात् $१ = \frac{१}{२} + \frac{१}{२}$

$\therefore अ^{१} = अ^{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}} = अ^{\frac{१}{२}} \times अ^{\frac{१}{२}} = \sqrt{अ} \times \sqrt{अ}$

$\therefore \sqrt{अ} = अ^{\frac{१}{२}}$, $\frac{१}{२}$ इदं वर्गमूलज्ञापकं चिह्नम् ।

एवं यदि $१ = \frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३}$ तदा $अ^{१} = अ^{\frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३}}$

$\therefore$ $\frac{१}{३}$ इदं घनमूलज्ञापकम् ।

अथ लघुरिक्थगणितम् = Lagarithms.

(७) नव्यगणिते घाताङ्को घातचिह्नं वा तन्मूलाङ्काधारोपरि तस्याङ्कस्य लघुरिकृथं प्रघातमापकं संमतमिह त्रिकोणमितौ व्यपदिश्यते ।

यथा— $३^४ = ८१$, अत्र ४ इदं त्र्यङ्काधारोपरि ८१ अस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वाऽस्ति ।

एवमव्यक्तस्थित्या–यदि $अ^क = न$ तदा क-इदम् अ-आधारोपरि-न-इत्यस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वा $\therefore क = लघु_अ न$ ।

(८) द्वयोरङ्कयोर्गुणनफलस्य लघुरिक्थं तदङ्कयोर्लघुरिक्थयोर्योगेन समो भवति ।

यथा—यदि $अ^क = न$, $अ^य = म$; तदा $न + म = अ^क + अ^य = अ^{क + य}$, $\therefore क + य = लघु_अ नम = लघु_अ न + लघु_अ म$ ।

(९) लब्धेर्लघुरिक्थं हरस्य लघुरिक्थेनोनितेन भाज्य-लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा— यदि $म = अ^य$, $न = अ^क$

तदा $\frac{म}{न} = \frac{अ^य}{अ^क} = अ^{य-क} \therefore लघु_अ \frac{म}{न} = लघु_अ म - लघु_अ न$ ।

(१०) कस्यापि लघुरिक्थं यदीष्टघातवृद्धिपर्यन्तं वर्ध्यते तदा तत् तद्घातवृद्धिपर्यन्तं वर्धितस्य तस्य लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा—$न \cdot लघु_अ म = लघु_अ (म^न)$ ।

कल्प्यते—$अ^क = म \therefore क = लघु_अ म$,

एवम् $म^न = (अ^क)^न = अ^{नक}$

$\therefore लघु_अ (म^न) = न \cdot क = न \cdot लघु_अ म$ ।

व्यक्तस्थित्या—$लघु ४८ = लघु (२^४ \times ३) = लघु २^४ + लघु ३ = ४ लघु २ + लघु ३$ ।

$$\text{लघु}\,\frac{६३}{४८४} = \text{लघु}\,\frac{७\times ३^{२}}{२^{२}\times ११^{२}}$$

$$= \text{लघु}७ + \text{लघु}३^{२} - \text{लघु}२^{२} - \text{लघु}११^{२}$$

$$= \text{लघु}७ + २\text{लघु}३ - २\text{लघु}२ - २\text{लघु}११ ।$$

एवम् $\text{लघु}\sqrt[५]{१३} = \text{लघु}१३^{\frac{१}{५}} = \frac{१}{५}\text{लघु}१३$ ।

(११) साधारणतो दशाङ्काधारोपरि लघुरिक्थस्य नियमोऽस्ति, यत्राधारो न दत्तस्तत्र दशाङ्कोऽध्याह्रियते ।

(१२) लघुरिक्थसंख्यायां पूर्णाङ्कः 'कैरेक्टेरिस्टिक्' (Characteristic) एकश्चान्यो भिन्नाङ्को दशमलवः 'मैण्टीसा' (Mantissa) कथ्यते ।

यथा—लघु ७९५ = २·९००३६७१, अत्र द्वयं पूर्णाङ्कः, ·९००३६७१ अयं दशमलवाङ्कः ।

नियताङ्कानां नियतचापांशज्यादीनां च लघुरिक्थार्थं तत्सारण्यवलोक्या ।

(१३) कस्यापि नियताङ्कलघुरिक्थे पूर्णाङ्कः सर्वदाऽधोलिखितनियमानुसारेण ज्ञायते ।

यथा— $\because १०^{०} = १ \therefore \text{लघु}\ १ = ०$ ।

$\because १०^{१} = १० \therefore \text{लघु}\ १० = १$ ।

$\because १०^{२} = १०० \therefore \text{लघु}\ १०० = २$ ।

$\because १०^{३} = १००० \therefore \text{लघु}\ १००० = ३$ ।

$\because १०^{४} = १०००० \therefore \text{लघु}\ १०००० = ४$ ।

$\because १०^{५} = १००००० \therefore \text{लघु}\ १००००० = ५$ ।

इत्यादि ।

(१) अत एकमारभ्य दशपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं शून्यत एकपर्यन्तं भवत्यतः पूर्णाङ्कः शून्यं दशमलवाङ्का भवन्ति ।

(२) दशतः शतपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थमेकद्वयान्तस्तत एकः पूर्णाङ्कस्ततोऽग्रे दशमलवाङ्काः ।

(३) शततः सहस्रपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं द्वयत्रयान्तः, एवं सहस्रतो दशसहस्रपर्यन्तमङ्कानां त्रिचतुरन्त एवं पूर्णाङ्कानां दशमलवाङ्कानां विवेकः कर्त्तव्यः । अत्र पूर्णाङ्का दशमलवाङ्काश्च धनात्मका एव ।

(४) एकाल्पानां भिन्नानां लघुरिक्थमृणात्मकं भवति ।

यथा— $\because$ $१०^{०} = १$, $\therefore$ लघु $१ = ०$

$\because$ $१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot१$ $\therefore$ लघु $\cdot१ = -१$

$\because$ $१०^{-२} = \frac{१}{१०^{२}} = ०\cdot१$ $\therefore$ लघु $०\cdot१ = -२$

$\because$ $१०^{-३} = \frac{१}{१०^{३}} = ००\cdot१$ $\therefore$ लघु $००\cdot१ = -३$

एवमन्यदपि ।

(५) एवमिहैकतः $\frac{१}{१०}$ एतत्पर्यन्तं शून्यत ऋणात्मकैकान्तलघुरिक्थं भवत्यतस्तस्य पूर्णाङ्के मस्तकोपरि तिर्यग्रेखा दीयते ।

यथा— $-१ +$ (यत्किञ्चिद्दशमलवाङ्कः)

अतोऽत्र पूर्णाङ्कः $= \bar{१}$, एवम् $\bar{२}$, $\bar{३}$ इत्यादि ।

अथ

चतुर्थोऽध्यायः ।

अत्र त्रिभुजगणितं ततो वंशादीनां दैर्घ्यौच्च्याद्यवगमकोदाहरणानि चोच्यन्ते ।

त्रिभुजगणितम् ।

५४ । त्रिभुजस्य षण्णामवयवानामन्यतमेभ्यस्त्रिभ्योऽवयवेभ्यः शेषावयवज्ञानाय यद्गण्यते तत् त्रिभुजगणितसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणत्रयमात्रज्ञाने शेषावयवानामनियतत्वान्न तत्र त्रिभुजगणितप्रसक्तिः ।

१ जात्यत्रिभुजगणितम् ।

५५ । जात्यत्रिभुजे एकावयवः समकोणत्वाज्ज्ञात एव शेषाणामन्यतमाभ्यां कोणद्वयेतरावयवाभ्यां शेषावयवावगमः (३७)प्रक्रमतः सुशकः ।

तथा हि, प्रथमः प्रकारः—

कल्प्यताम् अभुजो ज्ञातः, तत्संमुखः आकोणश्च ज्ञात इति तदा

$$\left\{\begin{array}{l} \because \text{ आ} + \text{का} = \text{गा} = 90^\circ \\ \therefore \text{ का} = 90^\circ - \text{आ, एवं काकोणो ज्ञायते} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{एवम्} \quad \because & \text{स्पआ} = \dfrac{\text{अ}}{\text{क}} & \therefore \text{क} = \dfrac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \\ \text{तथा} & \text{ज्याआ} = \dfrac{\text{अ}}{\text{ग}} & \therefore \text{ग} = \dfrac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \end{array}\right\} \text{अत्र}$$

स्पआ, ज्याआ अनयोरिष्टव्यासार्धे(त्रि)परिणामितयोः सिद्धे क, ग माने

$$\text{क} = \dfrac{\text{अ}}{\dfrac{\text{स्पआ}}{\text{त्रि}}} = \dfrac{\text{त्रि}\cdot\text{अ}}{\text{स्पआ}} \text{ । } \text{ग} = \dfrac{\text{अ}}{\dfrac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}}} = \dfrac{\text{त्रि}\cdot\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \text{ ।}$$

अत्र किल त्रिज्या $१०^{१०}$ एतावती कल्प्यते तस्या दशमूलकः प्रघातमापको दश भवन्ति। अतः क*मानस्य प्रघातमापकः = प्र†घा$_{द}$क

$$= १० + प्रघा_{द}अ - प्रघा_{द}स्पआ ।$$

एवं ग-मानस्य प्रघातमापकः = प्रघा$_{द}$ग

$$= १० + प्रघा_{द}अ - प्रघा_{द}ज्याआ$$

एवं सर्वत्र प्रघातमापकरूपविधानमवगम्यम्।

एवं शेषभुजौ ज्ञायेते।

उदा०। अ‡ = १२०। आ = ४५°। १४′। २३″ शेषावयवाः क इति प्रश्नः।

$$अत्र का = ९०° - ४५° । १४′ । २३″ = ४४° । ४५′ । ३७″$$

तदा प्रघा$_{द}$क = १० + प्रघा$_{द}$अ − प्रघा$_{द}$स्पआ

$$= १० + २\cdot०७९१८१२ - १०\cdot००३६३४२$$

$$= \left\{\begin{array}{l} +१२\cdot०७९१८१२ \\ -१०\cdot००३६३४२ \end{array}\right.$$

$$= २\cdot०७५५४७० = प्रघा_{द}११९ \therefore क = ११९ ।$$

---

* $\because क = \frac{त्रि\cdot अ}{स्पआ}$ अतोऽत्र मद्दर्शितलघुरिक्थगणितस्थौ (८,९) नियमाववलोक्यौ।

† प्रघा$_{द}$ इदं चिह्नं दशमूलकप्रघातमापकद्योतकम्।

‡ नियताङ्कानां तथा नियतचापांशज्यादीनां च लघुरिक्थार्थमङ्गल-भाषाबद्धनियमादिका 'चैम्बर्स्–मैथेमेटिकल्–टेबल्स' (Chambers's Mathematical Tables) एतन्नामिका सारण्यवलोक्या। तत्र दशमलवाङ्कास्तु सन्त्येव पूर्णाङ्कार्थं मद्दर्शितलघुरिक्थगणितस्थ–(१३) नियमस्य टिप्पण्यवलोक्या।

अथ च प्रघा$_{\text{द}}$ग = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$ज्याआ

= १० + २·०७९१८१२ − ९·८५१२९४५

$$= \begin{cases} + १२·०७९१८१२ \\ - \ \ ९·८५१२९४५ \end{cases}$$

= २·२२७८८६७ = प्रघा$_{\text{द}}$१६९ ∴ ग = १६९ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः का = ४४° । ४५′ । ३७″

क = ११९

ग = १६९ ।

द्वितीयः प्रकारः—

कल्प्यताम् अभुजस्तत्संलग्नः काकोणश्च ज्ञात इति तदाऽत्र आ = ९०°− का

$$(\text{प्र० ३७}) \begin{cases} \text{स्पका} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} \ \therefore \ \text{क} = \text{अ·स्पका} \\ \text{कोज्याका} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \ \therefore \ \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याका}} \end{cases}$$

क, ग अनयोः प्रघातमापकरूपे

प्रघा$_{\text{द}}$क = प्रघा$_{\text{द}}$अ + प्रघा$_{\text{द}}$स्पका − १०

प्रघा$_{\text{द}}$ग = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$कोज्याका ।

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । अ = १२० । का = ४४° । ४५′ । ३७″ अत्र शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र आ = ९०° − (४४° । ४५′ । ३७) = ४५° । १४′ । २३″

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स्पका} - १०$$

$$= २\cdot०७९१८१२ + ९\cdot९९६३६५८ - १०$$

$$= \begin{cases} + & २\cdot०७९१८१२ \\ + & ९\cdot९९६३६५८ \\ - & १० \end{cases}$$

$$= २\cdot०७५५४७० = \text{प्रघा}_{\text{द}}११९ \therefore \text{क} = ११९$$

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग} = १० + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्याका}$$

$$= १० + २\cdot०७९१८१२ - ९\cdot८५१२९४५$$

$$= \begin{cases} + & १२\cdot०७९१८१२ \\ - & ९\cdot८५१२९४५ \end{cases}$$

$$= २\cdot२२७८८६७ = \text{प्रघा}_{\text{द}}१६९ \therefore \text{ग} = १६९$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५° । १४′ । २३″

क = ११९

ग = १६९ ।

तृतीयः प्रकारः—

कल्प्यतां गभुजस्तत्संलग्न (आ)–कोणश्च ज्ञाताविति ।

तदाऽत्र का = ९०° – आ

$$\text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{अ} = \text{ग}\cdot\text{ज्याआ}$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{क} = \text{ग}\cdot\text{कोज्याआ}$$

प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} - १०$$

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्याआ} - १०$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । ग = १६९ । आ = ४५° । १४′ । २३″ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र $\text{का} = ९०^\circ - (४५^\circ । १४' । २३'') = ४४^\circ । ४५' । ३७''$

प्रघा$_{\text{द}}$अ = प्रघा$_{\text{द}}$ग + प्रघा$_{\text{द}}$ज्याआ − १०

$$= \begin{cases} + & २\cdot२२७८८६७ \\ + & ९\cdot८५१२९४५ \\ - & १० \end{cases}$$

= २·०७९१८१२ = प्रघा$_{\text{द}}$१२० ∴ अ = १२० ।

प्रघा$_{\text{द}}$क = प्रघा$_{\text{द}}$ग + प्रघा$_{\text{द}}$कोज्याआ − १०

$$= \begin{cases} + & २\cdot२२७८८६७ \\ + & ९\cdot८४७६६०३ \\ - & १० \end{cases}$$

= २·०७५५४७० = प्रघा$_{\text{द}}$११९ ∴ क = ११९ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः का = ४४° । ४५' । ३७''

अ = १२०

क = ११९ ।

चतुर्थः प्रकारः—

कल्प्यताम् अ,गभुजौ ज्ञाताविति

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्, प्रघा$_{\text{द}}$ज्याआ = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ−प्रघा$_{\text{द}}$ग ।

एवम् आकोणे ज्ञाते ततः का = ९०° − आ

प्रघा$_{\text{द}}$क = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$स्पआ ।

एवं काकोण-गभुजौ व्यक्तौ भवतः ।

यद्वा $\text{क}^२ = \text{ग}^२ - \text{अ}^२$ इति क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य ४७ प्रतिज्ञया सिद्ध्यति । अतः कोणनिरपेक्षविधिनैव कभुजो व्यक्तो भवति ।

उदा० । अ = १२० । ग = १६९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघा$_{\text{द}}$ज्याआ = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$ग

= १० + २·०७९१८१२ − २·२२७८८६७

= { + १२·०७९१८१२
  − २·२२७८८६७

= ९·८५१२९४५ = प्रघा$_{\text{द}}$ज्या ४५° । १४′ । २३″

∴ आ = ४५° । १४′ । २३″

∴ का = ९०° −(४५° । १४′ । २३″)= ४४° । ४५′ । ३७″

अथ च प्रघा$_{\text{द}}$क = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$स्पआ

∴ क-मानम् = ११९

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५° । १४′ । २३″

का = ४४° । ४५′ । ३७″

क = ११९ ।

यद्वा क = $\sqrt{\text{ग}^2 - \text{अ}^2} = \sqrt{(\text{१६९})^2 - (\text{१२०})^2}$ = ११९ सिद्धः स एव भुजः ।

पञ्चमः प्रकारः—

कल्प्यताम् अ, क भुजौ ज्ञाताविति तदा स्पआ = $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ ।

यद्वा प्रघा$_{\text{द}}$स्पआ = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$क ।

एवम् आ-कोणं ज्ञात्वा ततः

का = ९०° − आ

तथा प्रघा$_{\text{द}}$ग = १० + प्रघा$_{\text{द}}$अ − प्रघा$_{\text{द}}$ज्याआ

एवं का-कोण-ग-भुजौ विज्ञेयौ ।

यद्वा ग^2 = अ^2 + क^2, एवं क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य (४७) प्रतिज्ञया ग-भुजो व्यक्तो भवति ।

उदा० । अ = १२० । क = ११९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः

अत्र प्रघा$_{द}$स्पआ = १० + प्रघा$_{द}$अ − प्रघा$_{द}$क

= १० + २·०७९१८१२ − २·०७५५४७०

$$=\begin{cases} + \text{१२·०७९१८१२} \\ - \quad \text{२·०७५५४७०} \end{cases}$$

= १०·००३६३४२ = प्रघा$_{द}$स्प४५°। १४′। २

∴ आ = ४५° । १४′ । २३″

∴ का = ४४° । ४५′ । ३७″

तथा प्रघा$_{द}$ग = १० + प्रघा$_{द}$अ − प्रघा$_{द}$ज्याआ । अस्मात् सिद्धं

ग-भुजमानम् = १६९ ।

यद्वा ग = $\sqrt{(\text{१२०})^{२} + (\text{११९})^{२}}$ = १६९ सिद्धः स एव ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

जात्यत्रिभुजे

	ज्ञातावयवाः		शेषावयवाः
(१)	अ = २१ ; आ = ४६° । २३′ । ५०″	…	का = ४३° । ३६′ । १०″ ; क = २० । ग = २९
(२)	अ = १०० ; आ = ५४° । १७′	…	का = ३५° । ४३′ ; क = ७१·९०११५ ; ग = १२३·१६६६५
(३)	अ = १३६ ; का = ६३° । ३१′ । ८″	…	आ = २६° । २८′ । ५२″ ; क = २७३ । ग = ३०५
(४)	अ = १३५ ; का = २५° । २३′	…	आ = ६४° । ३७′ ; क = ६४·०५४२८ ; ग = १४९·४२५५७

(५) { ग = ५४७·२१, आ = ३१°।४५′।२२·४″ } ... { का = ५८°।१४′।३७·६″, अ = २८८, क = ४६५·२९ }

(६) { ग = ९२१७, आ = १°।११′।३७″ } ... { का = ८८°।४८′।२३″, अ = १९२।क = ९२१५ }

(७) { अ = ४०६०, ग = ५७४१ } ... { आ = ४५°।०′।२५·४″, का = ४४°।५९′।३४·६″, क = ४०५९ }

(८) { क = २२४, ग = ७८२ } ... { आ = ७३°।२१′।१७″, का = १६°।३८′।४३″, अ = ७४९·२३५२ }

(९) { अ = २०, क = ९९ } ... { आ = ११°।२५′।१६·३″, का = ७८°।३४′।४३·७″, ग = १०१ }

(१०) { अ = १६, क = ११·५२९ } ... { आ = ५४°।१३′।२९·६″, का = ३५°।४६′।३०·४″, ग = १९·७२१ }

अथाजात्यत्र्यस्रगणितम् ।

५६ । अजात्यत्र्यस्रे त्रिष्ववयवेषु ज्ञातेषु शेषावयवा ज्ञायन्ते तदल्पेषु ज्ञातेषु वा त्रिष्वपि कोणेषु ज्ञातेषु शेषावयवज्ञानं न भवति ।

अजात्यत्र्यस्रगणितस्यानेके प्रकारा भवन्ति त उच्यन्ते ।

प्रथमः प्रकारः—

यदा त्र्यस्र एको भुजः अ, कोणद्वयं च आ, का ज्ञातं भवति ।

तदा ∵ आ + का + गा = १८०° ∴ गा = १८०° − (आ + का)

एवं तृतीयकोणो ज्ञायते।

अथ (३६) प्रक्रमतः $\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

∴ क = $\frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$ अस्य प्रघातमापकरूपम्

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}$

साजात्यात् $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्यागा} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}$

एवं शेषभुजौ (क,ग) ज्ञायेते

उदा०(१) अ = १५, आ = ६७°। २२′। ४८·५″, का = ५३°। ७′। ४८·४″

शेषावयवाः क इति प्रश्नः।

अत्र गा = १८०° − (६७°। २२′। ४८·५″ + ५३°। ७′। ४८·४″)

= १८०° − (१२०°। ३०′। ३६·९″) = ५९°। २९′। २३·१″।

एवं $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}$

= १·१७६०९१३ + ९·९०३०९०० − ९·९६५२३७९

$= \begin{cases} + ११·०७९१८१३ \\ - \ \ ९·९६५२३७९ \end{cases}$

= १·११३९४३४ = $\text{प्रघा}_{\text{द}}$१३ ∴ क = १३।

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्यागा} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}$

= १·१७६०९१३ + ९·९३५२७४६ − ९·९६५२३७९

$= \begin{cases} + ११·१११३६५९ \\ - \ \ ९·९६५२३७९ \end{cases}$

= १·१४६१२८० = $\text{प्रघा}_{\text{द}}$१४ ∴ ग = १४।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः $\begin{cases} \text{गा} = ५९° । २९′ । २३·१″ \\ \text{क} = १३ । \text{ग} = १४ । \end{cases}$

उदा०(२) अ = १०। का = १२६°। ५२′। ११·६″। गा = २५°। ३′। २७·४″

शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र आ = १८०° − (१२६°। ५२′। ११·६″ + २५°। ३′। २७·४″)

= १८०° − (१५१°। ५५′। ३९″) = २८°। ४′। २१″ ।

ततः प्रघा$_{द}$क = प्रघा$_{द}$अ + प्रघा$_{द}$ज्याका − प्रघा$_{द}$ज्याआ

= १·००००००० + ९·९०३०९०० − ९·६७२६४११

= $\begin{cases} + १०·९०३०९०० \\ - \ \ ९·६७२६४११ \end{cases}$

= १·२३०४४८९ = प्रघा$_{द}$१७ ∴ क = १७ ।

= प्रघा$_{द}$ग = प्रघा$_{द}$अ + प्रघा$_{द}$ज्यागा − प्रघा$_{द}$ज्याआ

= १·००००००० + ९·६२६८८३६ − ९·६७२६४११

= $\begin{cases} + १०·६२६८८३६ \\ - \ \ ९·६७२६४११ \end{cases}$

= ०·९५४२४२५ = प्रघा$_{द}$९ ∴ ग = ९

एवं सिद्धाः शेषावयवाः $\begin{cases} \text{आ} = २८° । ४′ । २१″ \\ \text{क} = १७ । \text{ग} = ९ । \end{cases}$

द्वितीयः प्रकारः—

यदा त्र्यस्रे भुजौ (अ, क) तयोरन्यतरस्य संमुखकोणश्च (आ) इति ज्ञातं भवति तदा (३७) प्रक्रमतः

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{ज्याका} = \frac{\text{क}\cdot\text{ज्याआ}}{\text{अ}}$$

ततः गा = १८०° – (आ + का) एवं शेषकोणौ ज्ञेयौ।

अथ $$\therefore \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्यागा}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{\text{अ}.\text{ज्यागा}}{\text{ज्याआ}}$$

एवं का, ग अनयोर्मानयोः प्रघातमापकरूपे

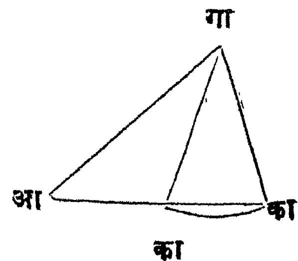
$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ}$ ।

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्यागा} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}$ ।

अत्रेदमवधेयम्। कोणस्य ज्यायास्तत्कोणोनसमकोणद्वयस्य ज्यया तुल्यत्वादत्र ज्यातो लब्धं कामनं साशीतिशताच्छुद्धं काकोणस्य द्वितीयमानं भवति। परं यदि क-भुजात् अ-भुजो लघुः स्यात्। अन्यथा नेति। यतः क-भुजात् अ-भुजस्याल्पत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽल्पः स्यात्। ततः पूर्वसाधितयोः का-कोणमानयोर्योगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् तन्मानयोरेकैकस्य का-कोणादल्पत्वेन आ-कोणेन युतस्य समकोणद्वयाल्पत्वादत्र का-कोणमानद्वयसंभवः। परन्तु क-भुजात् अ-भुजस्याधिकत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽधिकः स्यात्। अतस्तेन युतस्य का-कोणद्वितीयमानस्य समकोणद्वयाधिकत्वादत्र द्वितीयमानासंभवः।

इदं पार्श्ववर्त्तिक्षेत्रस्थितेः सम्यगवगम्यते।

कल्प्यताम् आकागा-त्रिभुजे आगा-भुजात् कागा-भुजोऽल्प इति। तदा गा-केन्द्रं मत्वा गाका-व्यासार्धेन काका चापे कृते स आका रेखायां आ बिन्दोः का-दिश्येव द्वितीयस्थाने लगति। तथा चोद्दिष्टावयवविशिष्टं त्रिभुजद्वयं सं-



पद्यते । तत्र का-कोणस्य द्वे माने अन्योऽन्यस्पर्धिनी स्पष्टं दृश्येते ।

अथ यदि आगा-भुजात् कागा-भुजो महान् स्यात् तदा आ-बिन्दोर्यस्यां दिशि का-बिन्दुर्वर्त्तते तदन्यदिशि काका-चापस्य आका-रेखया द्वितीयसंपातः स्यात् । तथा च द्वितीयत्र्यस्रस्यासंभवात् का-कोणद्वितीयमानासंभवः ।

एवं यदि काका-चापः आका-रेखां स्पृशेदेव तदा आगा-भुजात् कागा-भुजस्याल्पत्वेऽपि का-कोण एकविध एव भवेत् । यदि च काका-चापः आका-रेखां न स्पृशेन्न वा छिन्द्यात् तदा आकागा-त्रिभुजासंभवात् तदुद्दिष्टं खिलं स्यात् ।

उदा० (१) अ = १० । क = १७ । आ = २८° । ४′ । २१″

तदा शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र $प्रघा_{द}ज्याका = प्रघा_{द}ज्याआ + प्रघा_{द}क - प्रघा_{द}अ$

$= ९.६७२६४११ + १.२३०४४८९ - १.००००००० $

$= ९.९०३०९०० = प्रघा_{द}ज्या ५३° । ७′ । ४८.४″$

वा $= प्रघा_{द}ज्या\ १२६° । ५२′ । ११.६″$

अत्र क-भुजात् अ-भुजोऽल्पो भवति

अतः का = ५३° । ७′ । ४८.४″ वा १२६° । ५२′ । ११.६″ ।

एवमिह का-मानं द्विविधं भवति ।

∴ गा = ९८° । ४७′ । ५०.६″ वा २५° । ३′ । २७.४″ ।

अथ च $प्रघा_{द}ग = प्रघा_{द}ज्यागा + प्रघा_{द}अ - प्रघा_{द}ज्याआ$

$= प्रघा_{द}ज्या (९८° । ४७′ । ५०.६″) + प्रघा_{द}अ - प्रघा_{द}ज्याआ$

$= ९.९९४८६०४ + १.००००००० - ९.६७२६४११$

$= १.३२२२१९३ = प्रघा_{द}२१$ ∴ ग = २१

यद्वा $प्रघा_{द}ज्या (२५° । ३′ । २७.४″) + प्रघा_{द}अ - प्रघा_{द}ज्याआ$

$= ९.६२६८८३६ + १.००००००० - ९.६७२६४११$

$= ०.९५४२४२५ = प्रघा_{द}९$ ∴ ग = ९ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः $\begin{cases} \text{का} = ५३^\circ । ७' । ४८\cdot४'', \text{वा}, १२६^\circ । ५२' । ११\cdot६'' \\ \text{गा} = ९८^\circ । ४७' । ५०\cdot६'' \text{ वा } २५^\circ । ३' । २७\cdot४'' \\ \text{ग} = २१ \text{ वा } ९ । \end{cases}$

उदा० (२) अ = १५ । क = १३ । आ = ६७° । २२' । ४८·५"

शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र $\text{प्रघा}_\text{द}\text{ज्याका} = \text{प्रघा}_\text{द}\text{ज्याआ} + \text{प्रघा}_\text{द}\text{क} - \text{प्रघा}_\text{द}\text{अ}$

$= ९\cdot९६५२३७९ + १\cdot११३९४३४ - १\cdot१७६०९१३$

$= ९\cdot९०३०९०० = \text{प्रघा}_\text{द}\text{ज्या}५३^\circ । ७' । ४८\cdot४''$

$\therefore$ का = ५३° । ७' । ४८·४" ।

अत्र क-भुजात् अ-भुजो महानस्ति । अतोऽत्र का-मानमेकविधमेव ।

$\therefore$ गा = ५९° । २९' । २३·१" ।

ततः प्राग्वत् ग = १४ ।

तृतीयः प्रकारः—

यदा त्रिभुजे भुजौ क, ग, तयोरन्तर्गतकोणश्च आ इति ज्ञायते ।

तदा (३६) प्रक्रमतः $\dfrac{\text{क} + \text{ग}}{\text{क} - \text{ग}} = \dfrac{\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{का} + \text{गा})}{\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{का} - \text{गा})}$

$\therefore \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{का} - \text{गा}) = \dfrac{\text{क} - \text{ग}}{\text{क} + \text{ग}} \times \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{का} + \text{गा})$

परन्तु $\frac{1}{2} (\text{का} + \text{गा}) = ९० - \frac{1}{2} \text{आ}$ ।

$\therefore \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{का} - \text{गा}) = \dfrac{\text{क} - \text{ग}}{\text{क} + \text{ग}} \times \text{कोस्प } \frac{1}{2} \text{आ}$ ।

अस्य प्रघातसापकरूपमिदम् ।

$\text{प्रघा}_\text{द}\text{स्प } \frac{1}{2} (\text{का} - \text{गा})$

$= \text{प्रघा}_\text{द}\text{कोस्प } \frac{1}{2} \text{आ} + \text{प्रघा}_\text{द}(\text{क} - \text{ग}) - \text{प्रघा}_\text{द}(\text{क} + \text{ग})$ एवमज्ञातकोणयोरन्तरार्धं ज्ञायते तयोर्योगार्धं तु ज्ञातकोणाज्ज्ञातमेवास्ति

$\therefore$ का $= \frac{१}{२}$ (का + गा) + $\frac{१}{२}$ (का − गा) ।

गा $= \frac{१}{२}$ (का + गा) − $\frac{१}{२}$ (का − गा) ।

एवमज्ञातकोणौ ज्ञायेते ।

ततः प्रथमप्रकारेण तृतीयभुजज्ञानं सुलभम् ।

अथात्र यद्युद्दिष्टावयवैः शेषकोणनिरपेक्षमेव तृतीयभुजज्ञानमिष्टं तदा तत् (३८)प्रक्रमोक्तादस्मात् अ^{२}= क^{२}+ ग^{२} − २कग·कोज्याआ, समीकरणाज्ज्ञायते । परं न ह्यस्य समीकरणस्य प्रघातमापकरूपं संपद्यत इतीदं समीकरणं तथा परिणाम्यते यथाऽस्मात् प्रघातमापकद्वारा तृतीयभुजज्ञानं स्यात् स परिणामो द्विविधः ।

तत्रादावाद्यः प्रदर्श्यते—

(प$_१$) अ^{२} = क^{२} + ग^{२} − २कग·कोज्याआ

= क^{२} − २कग + ग^{२} + २कग (१− कोज्याआ)

= (क − ग)^{२} + ४कग·ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ आ

= (क − ग)^{२} $\left\{ १ + \frac{४कग}{(क-ग)^{२}} \right.$·ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ आ $\left. \right\}$

अत्र $\frac{४कग}{(क-ग)^{२}}$·ज्या^{२}$\frac{१}{२}$ आ, इदं धनमस्ति । अतस्तत्स्थाने (स्प^{२}इ) कल्प्यते तदा

अ^{२} = (क − ग)^{२} (१ + स्प^{२}इ) = (क − ग)^{२}·छे^{२}इ ।

$\therefore$ अ = (क − ग) छेइ ।

अस्य प्रघातमापकरूपम्

प्रघा$_{द}$अ = प्रघा$_{द}$(क − ग) + प्रघा$_{द}$छेइ − १० ।

अथ $\because$ स्प^{२}इ = $\frac{४कग}{(क-ग)^{२}}$ ·ज्या^{२}$\frac{१}{२}$ आ

$$\therefore \text{स्पइ} = \frac{२\sqrt{\text{कग}}}{\text{क} - \text{ग}} \cdot \text{ज्या} \tfrac{१}{२} \text{आ} ।$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$\text{प्रघा}_{द}\text{स्पइ} = \text{प्रघा}_{द}२ + \tfrac{१}{२}\text{प्रघा}_{द}\text{क} + \tfrac{१}{२}\text{प्रघा}_{द}\text{ग}$$
$$+ \text{प्रघा}_{द}\text{ज्या} \tfrac{१}{२} \text{आ} - \text{प्रघा}_{द}(\text{क} - \text{ग})$$

एवम् (इ)माने ज्ञाते ततः

$$\text{प्रघा}_{द}\text{अ} = \text{प्रघा}_{द}(\text{क} - \text{ग}) + \text{प्रघा}_{द}\text{छेइ} - १० ।$$

अस्मिन् परिणामे यदि (क − ग) अल्पं स्यात् तदा (स्पइ) महत् स्यात् ततो लब्धम् (इ) मानं स्थूलं स्यात् ततः (क) मानमपि स्थूलं स्यात् ।

अथातो द्वितीयपरिणाम उच्यते—

$$(\text{प}_{२})\ \text{अ}^{२} = \text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - २\text{कग}\cdot\text{कोज्याआ}$$
$$= \text{क}^{२} + २\text{कग} + \text{ग}^{२} - २\text{कग}(१ + \text{कोज्याआ})$$
$$= (\text{क} + \text{ग})^{२} - ४\text{कग}\cdot\text{कोज्या}^{२} \tfrac{१}{२} \text{आ}$$
$$= (\text{क} + \text{ग})^{२} \left\{ १ - \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^{२}} \cdot \text{कोज्या}^{२} \tfrac{१}{२} \text{आ} \right\}$$

अथ यतः $(\text{क} + \text{ग})^{२}$ अस्मात् (४कग) इदं सदैवाल्पं भवति ।

अतः $\frac{४\text{कग}}{(\text{क}+\text{ग})^{२}} \cdot \text{कोज्या}^{२} \tfrac{१}{२} \text{आ}$ इदं रूपादल्पं स्यात्

$$\therefore \quad \text{कल्प्यताम्—} \quad \frac{४\text{कग}}{(\text{क}+\text{ग})^{२}} \cdot \text{कोज्या}^{२} \tfrac{१}{२} \text{आ} = \text{ज्या}^{२}\text{इ}$$

तदा $\text{अ}^{२} = (\text{क}+\text{ग})^{२}(१ - \text{ज्या}^{२}\text{इ}) = (\text{क}+\text{ग})^{२}\ \text{कोज्या}^{२}\text{इ}$

$$\therefore \quad \text{अ} = (\text{क} + \text{ग})\ \text{कोज्याइ} ।$$

अथ ज्याइ, अ, अनयोर्मानयोः प्रघातमापकरूपे

$प्रघा_द ज्या इ = प्रघा_द २ + \frac{१}{२} प्रघा_द क + \frac{१}{२} प्रघा_द ग$
$+ प्रघा_द (कोज्या \frac{१}{२} आ) - प्रघा_द (क + ग)$ ।

$प्रघा_द अ = प्रघा_द (क + ग) + प्रघा_द कोज्या इ - १०$ ।

उदा० । क = ८२ । ग = २१ । आ = १०२° । ४०′ । ४९·४″ तदा

शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र $प्रघा_द स्प \frac{१}{२}(का - गा) = प्रघा_द कोस्प \frac{१}{२} आ$
$+ प्रघा_द (क - ग) - प्रघा_द (क + ग)$

$= प्रघा_द कोस्प (५१° । २०′ । २४″) + प्रघा_द ६१ - प्रघा_द १०३$

= ९·९०३०९०० + १·७८५३२९८ − २·०१२८३७२

$= \begin{cases} + ११·६८८४१९८ \\ - \;\; २·०१२८३७२ \end{cases}$

= + ९·६७५५८२६ = स्प २५° । २१′ । ३·५″ ।

∴ $\frac{१}{२}(का - गा)$ = २५° । २१′ । ३·५″ ।

अथ च $\frac{१}{२}(का + गा) = ९०° - \frac{१}{२}$आ = ३८° । ३९′ । ३५·३″

∴ का = ६४° । ०′ । ३८·८″

गा = १३° । १८′ । ३१·८″ ।

अतः प्रथमप्रकारेण सिद्धस्तृतीयभुजः अ = ८९ ।

अथाद्यपरिणामतस्तृतीयभुजज्ञानार्थं न्यासः ।

$प्रघा_द स्प इ = प्रघा_द २ + \frac{१}{२} प्रघा_द क + \frac{१}{२} प्रघा_द ग + प्रघा_द ज्या \frac{१}{२} आ$
$- प्रघा_द (क - ग)$

= ·३०१०३००+·९६११०९६५ + ·९५६९०६९५ + ९·८९२५७८१
− १·७८५३२९८

= ११·८११६२४७ − १·७८५३२९८ = १०·०२६२९४९

$= \text{स्प}\,(\,४६^\circ \mid ४४' \mid ४७''\,) \;\therefore\; \text{इ} = ४६^\circ \mid ४४' \mid ४७''$

$$\text{अथ प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{क} - \text{ग}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{छेइ} - १०$$

$$= १\cdot७८५३२९८ + १०\cdot१६४०६०२ - १०$$

$$= १\cdot९४९३९०० = \text{प्रघा}_{\text{द}}८९ \;\therefore\; \text{अ} = ८९$$

सिद्धस्तृतीयभुजः स एव ।

एवं द्वितीयपरिणामतोऽपि स एव भुजो लभ्यते ।

चतुर्थः प्रकारः—

यदा त्रिभुजस्य त्रयो भुजाः (अ,क,ग) ज्ञाता भवन्ति तदा आ-कोणज्ञानमधोलिखिताभिरुन्मितिभिः प्रत्येकं जायते ।

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{कग}}\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \qquad (१)$$

$$\text{ज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}} \qquad (२)$$

$$\text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}} \qquad (३)$$

$$\text{स्प}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}} \qquad (४)$$

अत्र प्रथमोन्मितेरुपपत्तिः (३९)प्रक्रमे द्रष्टव्या द्वितीयादीनां च (४०)प्रक्रमे विलोक्या ।

अथ यदा आ-कोणः समकोणासन्नो न स्यात् तदा प्रथमोन्मिते-स्तदानयनं कर्त्तुं युज्यते यतः सममोणासन्नकोणाज्याया धनुः सार-णीतः सूक्ष्मं न लभ्यते ।

यदा आ-कोणः समकोणासन्नः स्यात् तदा द्वितीयतृतीयो-न्मितिभ्यां प्रत्येकं तदानयनं कर्त्तुं युज्यते ।

यदा आ-कोणः समकोणद्वयासन्नो न स्यात् तदा चतुर्थोन्मितेस्तदानयनं कर्त्तुं युज्यते।

अथासामुन्मितीनां क्रमेण प्रघातमापकरूपाणि।

$$(१)\ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} = १० + \text{प्रघा}_{\text{द}}२ + \tfrac{१}{२}\Big\{\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स} + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{अ}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{क}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{ग})\Big\} - (\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग})।$$

$$(२)\ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \tfrac{१}{२}\Big\{२० + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{क}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{ग}) - (\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग})\Big\}।$$

$$(३)\ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \tfrac{१}{२}\Big\{२० + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स} + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{अ}) - (\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग})\Big\}।$$

$$(४)\ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स्प}\tfrac{१}{२}\text{आ} = \tfrac{१}{२}\Big\{२० + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{क}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{ग}) - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स} - \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{अ})\Big\}।$$

साजात्यात् का गा-कोणयोरपि माने एवं ज्ञातुं शक्येते।

उदा०। यत्र त्रिभुजे अ = २५। क = १७। ग = २८।

तत्र त्रयः कोणाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः।

अत्र प्रथमोन्मित्योत्तरावगमाय न्यासः।

$$\text{स} = \tfrac{१}{२}(२५ + १७ + २८) = ३५।$$

$$\therefore\quad \text{स} - \text{अ} = १०।$$

$$\text{स} - \text{क} = १८।$$

$$\text{स} - \text{ग} = ७।$$

अथ च

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} = १० + \text{प्रघा}_{\text{द}}२ + \tfrac{१}{२}\Big\{\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स} + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{अ})$$

$$+ \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{क}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}(\text{स} - \text{ग}) - (\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ग})\Big\}।$$

$$= १० + \cdot३०१०३००$$

$$+ \tfrac{१}{२}\Big\{१\cdot५४४०६८० + १\cdot००००००० + १\cdot२५५२७२५ + \cdot८४५०९८०\Big\}$$

$$- (१\cdot२३०४४८९ + १\cdot४४७१५८०)$$

$$= १०\cdot३०१०३०० + २\cdot३२२२१९३ - २\cdot६७७६०६९$$

$$= ९\cdot९४५६४२४ = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}(६१^\circ । ५५' । ३९'') ।$$

$\therefore$ आ $= ६१^\circ । ५५' । ३९''$ ।

ततः प्रथमप्रकारेण सिद्धम् का $= ३६^\circ । ५२' । ११\cdot६५''$ ।

$\therefore$ गा $= ८१^\circ । १२' । ९\cdot३५''$ ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

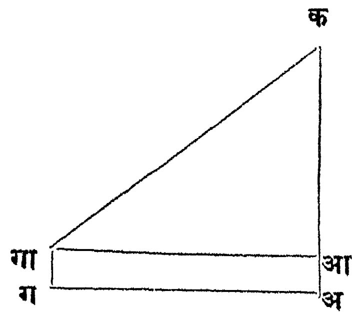
उद्दिष्टावयवाः ।	शेषावयवाः ।
(१) आ $= ५००$ आ $= ८५^\circ । ४७'$ का $= ५७^\circ । २५'$	गा $= ३६^\circ । ४८'$ क $= ४२२\cdot४४८१$ ग $= ३००\cdot३२४७$
(२) अ $= ३२७$ का $= २६^\circ । ८' । ५५''$ गा $= २३^\circ । ३२' । ५''$	आ $= १३०^\circ । १९'$ क $= १२९$ ग $= १७१\cdot२४७३$
(३) अ $= ८५$ क $= १००$ आ $= ३७^\circ । २९'$	का $= ४५^\circ । ४३' । ६\cdot६''$ वा $= १३४^\circ । १६' । ५३\cdot४''$ गा $= ९६^\circ । ४७' । ५३\cdot४''$ वा $= ८^\circ । १४' । ६\cdot६''$ ग $= १३८\cdot६९८७$ वा $= २०\cdot००७३६$

उद्दिष्टावयवाः ।	शेषावयवाः ।
(४) अ = ८५ क = २०२ आ = ११° । २५′ । १६″	का = २८° । ४′ । २१″ वा = १५१° । ५५′ । ३९″ गा = १४०° । ३०′ । २३″ वा = १६° । ३९′ । ५″ ग = २७३ वा = १२३
(५) अ = ८९ क = ६५ आ = ३६° । ५२′ । ११·६″	का = २५° । ५९′ । २१·२५″ गा = ११७° । ८′ । २७·१५″ ग = १३२
(६) क = १२५ ग = १५० आ = ३०°	का = ५५° । १०′ । २″ गा = ९४° । ४९′ । ५८″ अ = ७६·१४३
(७) अ = १३ क = २० गा = ७५° । ४५′	आ = ३६° । ५२′ । १२″ का = ६७° । २२′ । ४८″ ग = २१
(८) अ = १०० क = १०१ ग = १०२	आ = ५९° । १′ । २०″ का = ५९° । ५९′ । २५″ ग = ६०° । ५९′ । १५″
(९) अ = ३७ क = १५ ग = ४४	आ = ५३° । ७′ । ४८·३″ का = १८° । ५५′ । २८·७″ गा = १०७° । १६′ । ४३″
(१०) अ = ३४२०२०१ क = ८६६०२५४ ग = ९८४८०७८	आ = २०° का = ६०° गा = १००°

५७ । अजात्यत्र्यस्रस्य शेषावयवाजात्यत्र्यस्रगणितेनापि ज्ञातुं शक्यन्ते किन्तु तत्रेष्टकोणात् तत्संमुखभुजे लम्बं निपात्य द्वे त्र्यस्रे उत्पादनीये भवत इति विशेषः ।

५८ । अथ त्रिकोणमितेर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौच्च्यस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात् तथोच्यते । तदर्थमादौ कस्य चित् सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कतिपयकोणानां च मानं चावश्यमवगम्यं भवति । तत्र प्रदेशदैर्घ्यं तु रज्ज्वा सरलयष्ट्या वा गणयन्ति कोणांश्च तुरीयषष्ठादियन्त्रैः ।

उदा० (१) । यदि कस्यचित् (अक) सरलवंशस्यौच्च्यं ज्ञातव्यं तदा (अ) स्थानात् समानभूमौ सरलयष्ट्या (अग) प्रदेशं गणयित्वा (ग) स्थानात् (क) वंशाग्रस्योन्नतिं तुरीयेण षष्ठेन वा विद्ध्येत् तदा यदि (अग) दैर्घ्यं (अ) तुल्यं स्यात् (क) स्य उन्नतिश्च (क°) स्यात् (गगा) दृष्ट्युच्छ्रितिश्च (ग) स्यात् तदा (प्रक्र० ५० प्रका० २)



आक = आगा·स्प ∠ आगाक = अग·स्प ∠ आगाक

= अ·स्पक

∴ (अक) औच्च्यम् = अ·स्पक + ग

एवमौच्च्यं ज्ञायते ।

एवं दृक्समसूत्रादुच्चतरवस्तुनो गणितागतमौच्च्यमानं दृष्ट्युच्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवति । दृक्समसूत्रादधस्तनवस्तुनो गणितागतं मानं च दृष्ट्युच्छ्रायेण विश्लेषितं वास्तवं भवतीति ।

यद्यत्र अ = २५ हस्ताः । क = ३०° । ग = $३\frac{१}{२}$ हस्ताः

तदा $\text{आक} = २५ \times \text{स्प}३०°$

वा $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{आक} = \text{प्रघा}_{\text{द}}२५ + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स्प}३०° - १०$

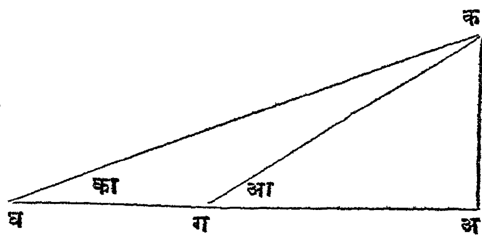
$= १\text{·}३९७९४०० + ९\text{·}७६१४३९४ - १०$

$= १\text{·}१५९३७९४ = \text{प्रघा}_{\text{द}}१४\text{·}४३३७६$

$\therefore$ वंशौच्च्यम् = १४·४३३७६ + ३·५ = १७·९३३७६ हस्ताः ।

उदा० (२) समानभूमौ वर्त्तमानस्य कस्याचित् प्रासादस्यौच्च्यं (अक), दूरत्वम् (अग) चावगम्यम् ।

अत्र कल्प्यताम् (ग)-स्थानात् (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (आ) । ततः (अ)-मूलावस्यां दिशि (ग)-स्थानं वर्त्तते तस्यामेव दिशि (ग)-स्थानात् (घ)-स्थानपर्यन्तम् (अ)-हस्त-मितदेशं गत्वा (घ)-स्थानात् पुनः (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (का) इति ।



तत्र यदि औच्च्यं (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र

$$\text{तदा (३६ प्र०)}\quad \frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}$$

$$\therefore \quad \text{कग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}$$

$$\therefore \quad \text{य} = (\text{कग}\cdot\text{ज्याआ}) = \frac{\text{अ}\cdot\text{ज्याआ}\cdot\text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} \text{ ।}$$

$$\text{एवम्} \quad \text{र} = \text{कग}\cdot\text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}\cdot\text{कोज्याआ}\cdot\text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{य} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या(आ} - \text{का)} - १० ।$$

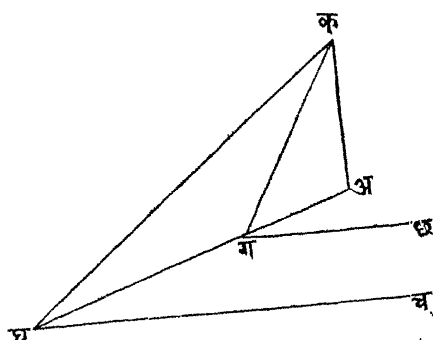
$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{र} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्याआ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या(आ} - \text{का)} - १० ।$$

यदीह— अ = ५० । आ = ३०° । २५′ । का = १९° । ३५′ ।

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्च्यमानम्, य = ४५·१४३ हस्ताः ।

तथा (ग)-स्थानात् दूरत्वम्, र = ७६·८९३ हस्ताः ।

उदा० (३) कस्याश्चित् (अगघ) क्रमनिम्नोर्व्यां भूपृष्ठे प्रावण्यं (अघच) किल (आ) अंशाः, तथा (अघ) भूमौ वर्त्तमानस्य (अक) गृहादेरौच्च्यदूरत्वयोरवगमाय तद्भूस्थेनैव द्रष्ट्रा (ग)-स्थानात् (क) अग्रवेधे कृते लब्धाः किलोन्नतांशाः (कगछ)=(का) अंशाः, ततः (अग) दिश्येव (ग) स्थानात् (घ)-स्थान पर्यन्तम्(अ) हस्तमितदेशं गत्वा पुनः (क)अग्रवेधे कृते लब्धाः किलोन्नतांशाः (कघच) = (गा)। तत्र यदि औच्च्यम् (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र,



$$\text{तदा य} = \frac{\text{कग.ज्याअगक}}{\text{ज्याकअघ}} = \frac{\text{कग.ज्या (का} - \text{आ)}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\text{परन्तु कग} = \frac{\text{गघ.ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{अ.ज्या(गा} - \text{आ)}}{\text{ज्या(का} - \text{गा)}}$$

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{\text{अ}\cdot\text{ज्या}(\text{का}-\text{आ})\cdot\text{ज्या}(\text{गा}-\text{आ})}{\text{कोज्याआ}\cdot\text{ज्या}(\text{का}-\text{गा})} \text{ ।}$$

$$\text{एवम्} \quad \text{र} = \frac{\text{कग}\cdot\text{ज्याअकग}}{\text{ज्याकअग}}$$

$$= \frac{\text{अ}\cdot\text{ज्या}(\text{गा}-\text{आ})\cdot\text{कोज्याका}}{\text{ज्या}(\text{का}-\text{गा})\cdot\text{कोज्याआ}} \text{ ।}$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{य} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{का}-\text{आ}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{गा}-\text{आ}) - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्याआ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{का}-\text{गा}) \text{ ।}$$

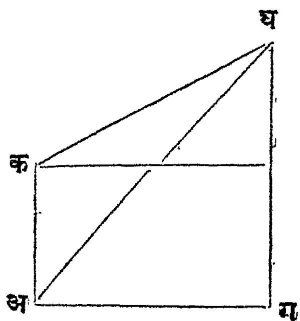
$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{र} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{गा}-\text{आ}) + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{का}-\text{गा}) - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्याआ} \text{ ।}$$

यद्यत्र अ = ५० हस्ताः, आ = ३०°, का = ६२° । ३०′, गा = ५०° । १५′

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्च्यमानम् य = ५०·६०३ ।

एवम् (ग) दूरत्वमानम् र = ४३·४८८ ।

उदा० (४) समभूस्थमवगतौच्च्यमल्पपर्वतमारुह्य भूस्थसरलवंशस्याग्रमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशान्*विद्ध्वा तद्वंशस्यौच्च्यमानं ज्ञातव्यम् ।



यथाऽत्र किल (गघ)-पर्वतौच्च्यम् = अ । (घ)-स्थानात् (अक)-वंशस्य मूलाग्रवेधे लब्धे क्रमेणाधरांशमाने (घअग) = आ, (घअच) = का । (अक) वंशौच्च्यम् = य

---

* पर्वताग्राल्लम्बरूपं कीलकाग्रं पश्यन् समभूस्थितवंशमूलं यष्ट्या विद्ध्येत् । एवं तद्वंशाग्रमपि । तत्र दृष्टिलग्नं कीलकाग्रयष्ट्युत्पन्नकोणकोट्यंशा एवाधरांशा इति ।

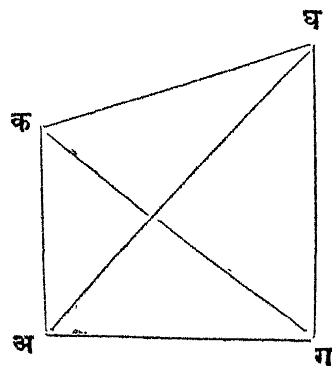
तदा $\frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{1}{\text{ज्याघअग}} = \frac{1}{\text{ज्याआ}}$ । $\therefore$ अघ $= \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}$ ।

एवम् $\frac{\text{अक}}{\text{अघ}} = \frac{\text{ज्याअघक}}{\text{ज्याअकघ}} = \frac{\text{ज्या(आ − का)}}{\text{कोज्याका}}$ ।

$\therefore$ अक $=$ य $= \frac{\text{अ·ज्या(आ − का)}}{\text{ज्याआ·कोज्याका}}$ अस्य प्रघातमापकरूपं * सुगमतरम् ।

उदा० (५) अज्ञातौच्च्याल्पपर्वतशिखरमारुह्य समभूस्थितयोरवगतान्तरयोर्वृक्षमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशमाने द्रष्टुर्वृक्षमूलपर्यन्तयोर्दृक्सूत्रयोरन्तर्गतकोणं चावगत्य तत्पर्वतौच्च्यं कथमवगम्यमिति प्रश्नः ।

यथा किलात्र अ, क वृक्षमूलयोरन्तरं, अक = अ । (गघ) पर्वतस्य (घ)-शिखरे स्थित्वा अ, क मूलयोर्वेधे कृते लब्धे क्रमेण दृक्समसूत्रादधरांशमाने आ, का तथा ∠ अघक = गा, (गघ) पर्वतौच्च्यम् = य,



तदा अकघत्रिभुजे अघ = य·कोछेआ, कघ = य·कोछेका †

---

* प्रघा$_{द}$य = प्रघा$_{द}$अ + प्रघा$_{द}$ज्या(आ − का) − प्रघा$_{द}$ज्याआ − प्रघा$_{द}$ज्याका, एतत् तु सुगमतरमत एव यतस्तत्र पर्वतौच्च्याधरांशमानकल्पनमपि सुगमम् ।

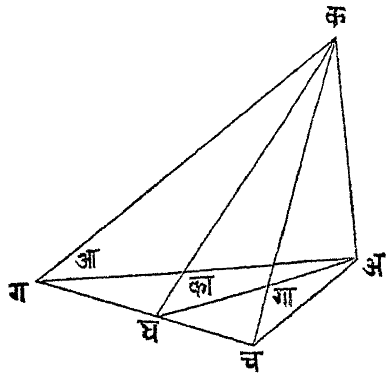
† त्रिभुजे भुजत्रयमानेषु ज्ञातेषु यस्य कोणस्य कोटिज्याऽपेक्ष्यते प्रक्रमतस्तत्कोणात्पादकभुजवर्गयोगस्तत्कोणसंमुखभुजवर्गोन-

$\therefore$ अ^2

$= $ य^2·कोछे^{2}आ + य^2·कोछे^{2}का − २य^2·कोछेआ.कोछेका.कोज्यागा ।

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{आ} + \text{कोछे}^2\text{का} - 2\,\text{कोछेआ}\cdot\text{कोछेका}\cdot\text{कोज्यागा}}}$$ इत्युत्तरम् ।

उदा० (६) (अगच) समभुवि स्थितस्य (अक)-वंशादेः (क) अग्रे (गच) सरलरेखास्थेषु ग, घ, च, स्थानेषु स्थित्वा विद्धे लब्धाः क्रमेणांशाः आ, का, गा, । एवं (गघ) (घच) रेखयोर्गणने लब्धा हस्ताः अ, क । अत्रैभ्यः (अक) वंशादेरौच्च्यमवगम्यम् ।



तदा कल्प्यतामत्र (अक) औच्च्यम् = य

$\therefore$ अग = य·कोस्पआ, अघ = य·कोस्पका, अच = य·कोस्पगा ।

$$\text{अत्र यतः कोज्याअघग} = \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{2\,\text{अघ}.\text{गघ}}$$

$$\text{कोज्याअघच} = \frac{\text{अघ}^2 + \text{घच}^2 - \text{अच}^2}{2\,\text{अघ}\cdot\text{घच}}$$ ।

एवम् कोज्याअघग = − कोज्याअघच

स्तन्निर्दिष्टकोणात्पादकभुजघातेन द्विगुणेन भक्तस्तत्कोणकोटिज्या

$$\text{यथा— कोज्यागा} = \frac{\text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - \text{अ}^2}{2\,\text{अघ}.\text{कघ}}$$ अत उत्थापनेन ।

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{2\text{अघ}.\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{2\text{अघ}\cdot\text{घच}} * ।$$

अत्रत्य†पदानि पूर्वसाधितैस्तत्तदुन्मानैरुत्थाप्य समीक्रियया लब्ध-मौच्च्यमानम्,

$$\text{य} = \sqrt{\frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ}.\text{कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\,\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क}\cdot\text{कोस्प}^2\text{आ}}} ।$$

उदा० (७) पारेनदि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोः अ, क वृक्षयोरन्तर-

---

$$* \therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{2\text{अघ}\cdot\text{गघ}} = \frac{\text{अघ}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{2\text{अघ}\cdot\text{घच}},$$

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{\text{घच}},$$

$\therefore \text{अघ}^2\cdot\text{घच} + \text{गघ}^2\cdot\text{घच} - \text{अग}^2\cdot\text{घच} = \text{अच}^2\cdot\text{गघ} - \text{अघ}^2\cdot\text{गघ} - \text{घच}^2\cdot\text{गघ},$

$\therefore \text{गघ}^2\cdot\text{घच} + \text{घच}^2\cdot\text{गघ} = \text{गघ}\cdot\text{घच}(\text{गघ} + \text{घच}) = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$

$= \text{अच}^2\cdot\text{गघ} + \text{अग}^2\cdot\text{घच} - \text{अघ}^2\cdot\text{घच} - \text{अघ}^2\cdot\text{गघ}$

$= \text{गघ}(\text{अच}^2 - \text{अघ}^2) - \text{घच}(\text{अघ}^2 - \text{अग}^2)$

$= \text{गघ}(\text{य}^2\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - \text{य}^2\cdot\text{कोस्प}^2\text{का}) - \text{घच}(\text{य}^2\cdot\text{कोस्प}^2\text{का} - \text{य}^2\cdot\text{कोस्प}^2\text{आ})$

$= \text{य}^2(\text{गघ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - \text{गघ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{का} - \text{घच}\cdot\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{घच}\cdot\text{कोस्प}^2\text{आ})$

$= \text{य}^2(\text{अ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - \text{अ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{का} - \text{क}\cdot\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क}\cdot\text{कोस्प}^2\text{आ})$

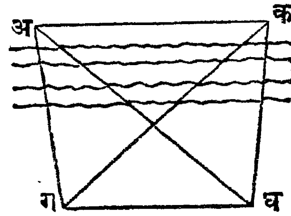
$= \text{य}^2(\text{अ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क}.\text{कोस्प}^2\text{आ} = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$

$$\therefore \text{य}^2 = \frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ}+\text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क}\cdot\text{कोस्प}^2\text{आ}}$$ एतत्पदं

(य)-मानमाकरे स्पष्टम् ।

† अघ, अग, अच, गघ, घच इमानि स्वरूपाणि ।

प्रदेशस्यावगमाय तत्समभूदेशेऽवाक्तीरे (गघ)-रेखाम् (अ)-हस्तमितां गणयित्वा (ग)-स्थानात् गणितयोः (अगघ), (कगघ) कोणयोः क्रमेणांशाः (आ, का) ततः (घ)-स्थानाच्च (कघग), (अघग) कोणयोः क्रमेणांशाः (गा, घा) एभ्यः (अ, क) वृक्षयोरन्तरमवगम्यम् ।



तदा (अगघ) त्रिभुजात् सिद्धम् $\frac{अघ}{गघ} = \frac{ज्याअगघ}{ज्यागअघ}$

$$\therefore अघ = \frac{अ.ज्याआ}{ज्या(आ+घा)} ।$$

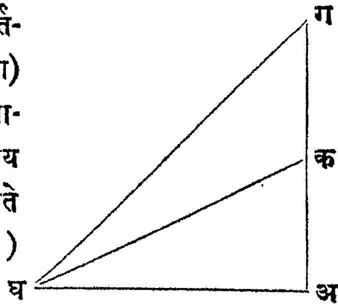
एवमेव(कगघ)त्रिभुजात् सिद्धम् $कघ = \frac{अ.ज्याका}{ज्या(का+गा)}$ ।

एवम् (अघ), (कघ) भुजौ तदन्तर्गतः (अघक) कोणश्चैतेभ्यः (अक) भुजावगमः (३८) प्रक्रमतः सुगमः ।

तथा हि— $अक^{२*} = अघ^{२} + कघ^{२} - २अघ.कघ.कोज्याअघक$

$$\therefore अक = \sqrt{अघ^{२} + कघ^{२} - २अघ.कघ.कोज्या(गा - घा)} ।$$

उदा० (८) (घअ) समभुवि वर्त्तमानस्य (अकग) गृहादेः (अक),(कग) प्रदेशौ क्रमेण अ, क हस्तपरिमितावगतौ । तत्र तद्गृहादेर्दूरत्वावगमाय (घ) स्थानात् (कघग) कोणे मापिते लब्धा अंशाः (आ) तथा च (घअ) दूरत्वं कियत् स्यादिति प्रश्नः



* स्पष्टार्थं पञ्चमोदाहरस्य टिप्पणी विलोक्या ।

अत्र किल य = घअ-प्रदेशहस्ताः ।

$$\text{तदा स्पकघग} = \text{स्प(अघग} - \text{अघक)} = {}^{*}\frac{\text{स्पअघग} - \text{स्पअघक}}{१ + \text{स्पअघग.स्पअघक}}$$

$$\text{परमत्र स्पअघग} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}}, \ \text{स्पअघक} = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$$

$$\therefore \text{उत्थापनेन, स्पआ} = \frac{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{य}}}{१ + \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}}} = \frac{\text{कय}}{\text{य}^{२} + \text{अ(अ+क)}}$$

अस्मात् समीकरणतो लब्धं (य) मानम्

$$= \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^{२} - ४\text{अ(अ + क) स्प}^{२}\text{आ}}}{२\text{स्पआ}}$$

अत्र (स्पआ) अस्य मानं यथा— $\frac{\text{क}}{२\sqrt{\text{अ(अ + क)}}}$ अस्मादूनं तेन समं वा ततोऽधिकं वा स्यात् तथा (य) मानं क्रमेण द्विविधमेकविधमसंभवं च बोध्यम् ।

तदेकविधमानं च $\sqrt{\text{अ(अ + क)}}$ एतत् स्यात् ।

एतत्प्रश्नोत्तरं क्षेत्रमितिरीत्याऽपि झटित्यवगम्यते ।

तथा हि— (कग) रेखोपरि तथा वृत्तखण्डं कार्यं यथा तद्रेखायां वर्त्तमानः तत्खण्डपरिधिलग्नः कोणः (आ) अंशपरिमितः स्यात् । ततः (अ)-स्थाने लम्बः कार्यः । तेन लम्बेन तद्वृत्तखण्डे छिन्ने स्पृष्टेऽस्पृष्टे वा (अघ) मानं द्विविधमेकविधमसंभावं वेति स्पष्टमवगतं स्यात् ।

अथ लम्बेन वृत्तखण्डे स्पृष्ट एकविधम् (अघ) दूरत्वमानमिदं $\sqrt{\text{अ(अ + क)}}$ क्षेत्रमितितृतीयाध्यायस्य षट्त्रिंशप्रतिज्ञया स्पष्टम् ।

---

* एतदर्थं २० पृष्ठस्य ४ पङ्क्तिर्विलोक्या ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

(१)* यस्यायतक्षेत्रस्य कोटिः ५० (अ) हस्ताः । तस्य कोट्येकप्रान्ते स्थित्वा संमुखकोटिप्रान्तयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ३०° (आ) तथा च तस्य भुजप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{भुजः} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} = ५०\sqrt{३} = ८६\cdot६०२५४ \text{ हस्ता इत्युत्तरम् ।}$$

(२) पूर्वापरायतताया भित्तेर्दृक्सूत्रादुच्छ्रितिः १५ (अ) हस्ताः । तस्या भित्तेर्दक्षिणपार्श्वे ३५ (क) हस्तान्तरे देशे स्थित्वा ध्रुवतारायां विलोकितायां सा भित्त्यूर्ध्वप्रान्तलग्ना दृष्टा तत्र तदानीं ध्रुवोन्नतिः कियती स्यादिति प्रश्नः ।

$$\text{ध्रुवोन्नतिः} = \dagger\text{स्प}^{-१} \frac{\text{अ}}{\text{क}} = २३^{\circ} \text{ । } ११' \text{ । } ५५'' \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(३) कस्यचिद्वंशादेरौच्च्यावगमाय गणकस्तत्समभुवि सरलप्रदेशं २०० (अ) हस्तमितं गणयित्वा तत्प्रदेशैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य वंशाद्यग्रस्य चान्तर्गतकोणम् ५०° । १२′ (आ) अंशमितं विध्वा तत्प्रदेशापरप्रान्ताच्च तदाद्यप्रान्तस्य वंशाद्यग्रस्य चान्तर्गतकोणम् ४०° । २५′ (का) अंशमितं वंशाद्यग्रस्य चोन्नतिम् ५७° । ४०′ (गा) अंशमितां ज्ञातवान् । तथा च तस्य वंशादेरौच्च्यं कियत् स्यादिति प्रश्नः ।

---

* सर्वेषां प्रश्नानां सोपपत्तिकान्युत्तराणि प्रश्नान्ते विलोक्यानि ।

† यावतः कोणस्य चापस्य वा स्पर्शरेखा $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ स्यात् तावतो द्योतकं $\text{स्प}^{-१}\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ एतत् स्यात् । एवं $\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ । $\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इत्यादीनि कोज्यादीनां कोणांश्चापान् वा द्योतयन्तीति ।

$$\text{वंशाद्यौच्चम्} \frac{\text{अ·ज्याआ·ज्यागा}}{\text{ज्या(आ + का)}} = \text{१२९·८४ हस्ताः ।}$$

(४) पारेदुस्तरनदि किञ्चिद्गृहादि वर्त्तते तस्यावाक्तीराद्दूरत्वावगमायावारतीरे १०० (अ) हस्तमितं तिर्यक्प्रदेशं विगणय्य तत्प्रदेशैकैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य गृहादेश्चान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे क्रमेण कोणमाने ४०°। २५′ (आ), ३७°। ४८′ (का) तथा च तत्तत्प्रदेशप्रान्तात् तद्गृहं कियति कियत्यन्तरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{प्रथमप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ·ज्याका}}{\text{ज्या(आ + का)}} = \text{६२·६१०१ हस्ताः ।}$$

$$\text{द्वितीयप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ·ज्याआ}}{\text{ज्या(आ + का)}} = \text{६६·२२९८२ हस्ताः ।}$$

(५) कस्याश्चिद्दुस्तरनद्याः पात्रविस्तृत्यवगमायावाक्तीरे ६० (अ) हस्तमितं तिर्यक् प्रदेशं विगणय्य तत्तत्प्रदेशप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य परतीरवर्त्तिनः कस्यचित् प्रस्तरादेश्चान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे क्रमेण कोणमाने ४२°। १७′ (आ)। ५२°। ३५′ (का) तथा च तस्या नद्याः कियती विस्तृतिरिति प्रश्नः ।

$$\text{नदीविस्तृतिः} = \frac{\text{अ·ज्याआ·ज्याका}}{\text{ज्या(आ + का)}} = \text{३२·१७७६८ हस्ताः ।}$$

(६) काश्यां गङ्गापात्रे वर्त्तमानायाः कस्याश्चिन्महातरण्याः संमुखतटदेशवर्त्तिनि चत्वारिंशत् (अ) हस्तौच्च्ये गृहे स्थितेन मनुजेन तद्गृहोर्ध्वतलदेशाभ्यां प्रत्येकं समसूत्रादधरांशा विद्धाः क्रमेण ४०°। १५′ (आ), २५°। ३०′ (का) एतन्मिता लब्धाः । तथा च वद्गृहतलं गङ्गापात्रजलपृष्ठसमदेशात् कियत्यामुच्छ्रित्यां वर्त्तते तदुच्छ्रितिदेशमूलाच्च सा महानौः कियति दूरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{उच्छ्रितिः} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ − का)}} = \text{१५·६२२५६ हस्ताः ।}$$

$$\text{दूरत्वम्} \frac{\text{अ·कोज्याआ.कोज्याका}}{\text{ज्या(आ − का)}} = \text{१०८·२२८९ हस्ताः ।}$$

(७) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे ५० (अ) हस्तौच्च्ये देवगृहं वर्त्तते तस्याग्रमूलयोस्तत्पर्वतोपत्यकायां स्थितेन मनुजेन विद्धयोर्लब्धे क्रमेणोन्नतांशमाने ५१° । ४०′ (आ) । ५०° । १५′ (का) तथा च तत्पर्वतौच्च्यं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{औच्च्यम्} = \frac{\text{अ·कोज्याआ·ज्याका}}{\text{ज्या(आ − का)}} = \text{९६४·४१२४ हस्ताः ।}$$

(८) कस्यचिन्महासरसो दक्षिणोत्तरभागयोरीश्वरप्रासादे वर्त्तेते तयोरन्तरप्रदेशावगमाय तत्सरसः पूर्वभागे तथा वंशो निखनितो यथा स दक्षिणप्रासादात् २०० (अ) हस्तान्तरे स्यादुदक्प्रासादाच्च ८० (क) हस्तान्तरे भवेत् । ततो दक्षिणप्रासादाद्वंशोदक्प्रासादयोरन्तर्गत-कोणे विद्धे लब्धा अंशाः २१° । १७′ (का) अत्र पृच्छा तयोः प्रासा-दयोरन्तरं कियदिति ।

$$\text{अन्तरम्} = \text{अ·कोज्याका} \pm \sqrt{\text{क}^{२} - \text{अ}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{क}}$$
$$= \text{२१९·९७२ वा १५२·७५ हस्ताः ।}$$

(९) समुद्रान्तः प्रविष्टयोर्भूदेशयोरग्रयोर्महान्तौ शाल्मलीवृक्षावा-साते । तयोरन्तरप्रदेशावगमाय भूमिस्थात् कस्माच्चित् स्थानात् प्रति-वृक्षपर्यन्तं गणितौ प्रदेशौ क्रमेण १५० (अ), २०० (क) हस्ता-त्मकौ स्याताम् । एवं तस्मादेव स्थानात् तयोर्वृक्षयोरन्तरर्गतकोणे विद्धे लब्धाः किलांशाः ५०° । २७′ (गा) तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरप्रदेशः कियानिति प्रश्नः ।

अन्तरप्रदेशः $= \sqrt{\text{अ}^2+\text{क}^2-2\text{अक}.\text{कोज्यागा}}$ = १५५·८७ हस्ताः।

(१०) पर्वतशिखरे प्रस्तरमयस्तम्भो वर्त्तते तस्यौच्च्यावगमाय तत्पर्वतनिकटभूमौ स्थित्वा स्तम्भाग्रोन्नतिवेधे लब्धा अंशाः ३१°। २०′ (आ) ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे सरलभूमौ १५० (अ) हस्तमितदेशं गत्वा स्तम्भाग्रमूलोन्नत्योर्वेधे कृते लब्धाः क्रमेणांशाः ४५°। ४२′ (का)। ३५°। ३३′ (गा) तथा च स्तम्भौच्च्यं कियत् पर्वतौच्च्यं च कियदिति प्रश्नः।

$$\text{स्तम्भौच्च्यम्} = \frac{\text{अ}.\text{ज्याआ}.\text{ज्या}(\text{का}-\text{गा})}{\text{कोज्यागा}.\text{ज्या}(\text{का}-\text{आ})} = ६८\cdot०९१ \text{ हस्ताः}$$

$$\text{पर्वतौच्च्यम्} = \frac{\text{अ}.\text{ज्याआ}.\text{कोज्याका}.\text{ज्यागा}}{\text{कोज्यागा}.\text{ज्या}(\text{का}-\text{आ})} = १५६\cdot८९८४ \text{ हस्ताः}$$

(११) यस्याः क्रमनिम्नभूमेः समानभूमौ प्रावण्यं ३९°। १५′ (आ) अंशा यस्याश्चाधरप्रान्तो दुस्तरनद्यास्तटं भवति तस्याः परतीरे एकं देवगृहं वर्त्तते तस्यौच्च्यावगमाय तद्देवगृहसंमुखमेव तत्-क्रमनिम्नोर्व्या उपरितनप्रान्ते गणकेन स्थित्वा देवगृहशिखरे विद्धे लब्धा अधरांशाः ११°। ३०′ (का) एवं स देवालयसंमुखदिश्येव तां क्रमनिम्नभूमिं २०० (अ) हस्तमितामवरुह्य तद्भूमेरधरप्रान्तं प्राप्य पुनस्तद्देवगृहाग्रे विद्धे लब्धा उन्नतांशाः २९°। २०′ (गा) तथा सति नद्या विस्तृतिः कियती देवगृहस्यौच्च्यं च कियदिति प्रश्नः।

$$\text{नद्या विस्तृतिः} = \frac{\text{अ}.\text{ज्या}(\text{आ}-\text{का}).\text{कोज्यागा}}{\text{ज्या}(\text{का}+\text{गा})} = १२४\cdot१६।$$

$$\text{देवगृहौच्च्यम्} = \frac{\text{अ}.\text{ज्या}(\text{आ}-\text{का}).\text{ज्यागा}}{\text{ज्या}(\text{आ}+\text{गा})} = ६९\cdot७७।$$

(१२) भूमौ निखनितस्य द्वात्रिंशद्धस्त-(अ) परिमाणौच्च्यस्य सरलवंशस्य मूलमभितः सर्वासु दिक्षु प्रवण आस्ते। तस्य समानभूमौ प्रावण्यं किल विंशतिरंशाः (आ°)। अथ तस्मिन् वंशे वातवेगेनैकदेशे भग्ने तस्याग्रं वंशमूलात् षोडश-(क) हस्तान्तरे लग्नम्, तथा सति वंशो मूलात् कियत्सु हस्तेषु भग्न इति प्रश्नः।

$$\frac{\text{अ}^2 - \text{क}^2}{2(\text{अ} + \text{क}).\text{ज्याआ}} = १०\cdot२४७६ \text{ हस्तेषु भग्न इत्युत्तरम्।}$$

(१३) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे १२० (अ) हस्तप्रमाणः प्रस्तरस्तम्भो वर्त्तते। तत्पर्वतोपत्यकास्थेन केनचित् पुरुषेण स्तम्भमूलाग्रयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ९° । ४०′ (आ) ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे २०० (क) हस्तमितसमानदेशं गत्वा पुनः स्तम्भमूलाग्रयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धास्तावन्त एवांशाः। तथा च पर्वतौच्च्यं कियदिति प्रश्नः।

$$\text{पर्वतौच्च्यम्} = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}\right)^2 - \text{क}^2} - \text{अ}\right\}$$

$$= २८३\cdot०४३४६५५ \text{ हस्ताः।}$$

(१४) हस्तशतो-(अ)च्छ्रयस्य राजसदनस्योपरिभागे स्थितो गणकः समभुवि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोर्वृक्षयोरन्तरं जिज्ञासुस्तन्मूलयोरधरांशमाने २° । ५६′ (आ), ३° । ११′ (का) एतावती अवगत्य तयोरेवान्तर्गतकोणं ९° । ४१′ (गा) अंशमितं दृष्टवान्। तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरं कियदिति प्रश्नः।

$$\text{अन्तरम्} = \text{अ}\sqrt{\text{कोछे}^2\text{आ} + \text{कोछे}^2\text{का} - 2\text{कोछेआ}.\text{कोछेका}.\text{कोज्यागा}}$$

$$= ३५४\cdot३४९ ।$$

(१५) एका पूर्वापराऽन्या याम्योत्तरा चेति द्वे भित्ती द्वादश (अ) हस्तोच्छ्रिते स्तः। तत्र यदा पूर्वापराया भित्तेरुत्तरपार्श्वे छाया हस्तचतुष्क-(क) विस्तृता याम्योत्तरायाश्च पश्चिमपार्श्वे छाया हस्तत्रय-(ग) विस्तृता स्यात् तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः।

$$\text{उन्नतांशाः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ६७^\circ \mid २२' \mid ४८'' \mid$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{पूर्वकाले}\\ \text{उत्तरा दिगंशाः}\end{array}\right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ५३^\circ \mid ७' \mid ४८'' \mid$$

(१६) एका पूर्वापरा द्वादश-(अ) हस्तोच्छ्र्या भित्तिरस्ति। तस्याः पश्चिमप्रान्ते लग्ना पूर्वदिक्चिह्नात् ६७° । ३०′ (आ) अंशान्तरे उत्तरभागे गताऽन्या भित्तिरस्ति साऽपि द्वादशहस्तोच्छ्र्या। यदा तयोर्भित्त्योश्छाये तद्बहिर्भाग एव तथा संजाते यथा पूर्वापरायाश्छाया हस्तत्रय-(क) विस्तृता स्यादन्यायाश्च हस्तचतुष्क-(ग) विस्तृता भवेत्। तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः।

$$\text{उन्नतांशाः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ}.\text{ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग}\cdot\text{कोज्याआ}}}$$

$$= ६२^\circ \mid ११' \mid ३९'' \mid$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{पूर्वकपाले}\\ \text{उत्तरा दिगंशाः}\end{array}\right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{का}\cdot\text{ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग}\cdot\text{कोज्याआ}}}$$

$$= २८^\circ \mid १७' \mid ५१'' \mid$$

(१७) कश्चन गणकः कोणमापकयन्त्रविरहितोऽपि केवलयष्ट्यैव दुस्तरनद्याः पात्रप्रमाणं जिज्ञासुरवाक्तीरे (कग) सरलप्रदेशं १७५ पञ्चसप्तत्युत्तरशतहस्तमितं गणयित्वा परतीरस्य (अ) चिह्नं (क)–

स्थानाद्यस्यां दिशि वर्त्तते तद्विरुद्धदिशि (कघ) प्रदेशं षष्टिहस्तमितं विगणय्य (गघ) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१४ ततः (ग) स्थानाद्यस्यां दिशि (अ) चिह्नं वर्त्तते तद्विपरीतदिशि (गच) प्रदेशं ९० हस्तमितं विगणय्य (कच) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१५ तथा च तन्नद्याः पात्रप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

पात्रप्रमाणम् = २००·८६२८ हस्ताः ।

(१८) यस्याः समानभूमौ प्रावण्यं विंशतिः २०° (आ) अंशास्तादृश्याः क्रमनिम्नभूमेरुपरितनभागेऽस्ति शत-(अ) हस्तोच्छ्रयः कश्चन तरुः । तस्य संमुखदेश एव क्रमनिम्नोर्व्यां अधस्तनभागे वृक्षाद्धस्तशतद्वया-(क)न्तरेऽस्त्येकोदकपूर्णा वापी । तथा च तद्वृक्षाग्रभागस्थयोर्वानरयोरेकस्तत उत्तीर्य वापीमगादपरश्च ततः किञ्चिदुड्डीय कर्णमार्गेण तामगात् । तथा च तयोर्गत्योः समत्व उड्डीनमानं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{उड्डीनमानम्} = \frac{\text{अक}(१ - \text{ज्याआ})}{२\text{अ} - \text{क}\ (१ + \text{ज्याआ})} = २८\cdot०९४५४५ \text{ ।}$$

(१९) सरलवंशस्याग्रे (अ) हस्तदैर्घ्यस्य समानप्रदेशस्य प्रान्तयोः प्रत्येकं स्थित्वा विद्धे लब्धास्तुल्या एव (आ) संख्याका उन्नतांशाः । तस्य च मध्यभागे स्थित्वा वंशाग्रे विद्धे लब्धा (का) उन्नतांशाः । तथा च तस्य वंशस्योच्छ्रितिः कियती प्रदेशमध्यस्थानाद्दूरत्वं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{उच्छ्रितिः} = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})\cdot\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}} \text{ ।}$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ.कोज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}(\text{का} + \text{आ})\cdot\text{ज्या}(\text{का} - \text{आ})}} \text{ ।}$$

(२०) अ, क, ग संज्ञकेषु त्रिषु स्थानेषु (अ) स्थानात् (क) स्थानं प्राच्यां दिशि वर्त्तते (ग) स्थानं च प्राक्चिह्नतो दक्षिणभागे (अ) अंशान्तरे वर्त्तते । अथ (कग) स्थानयोरन्तरप्रदेशः (अ) हस्तमितोऽस्ति किन्तु तस्य दुर्गमत्वात् कस्मिंश्चिन्मनुजे (क) स्थानात् (अ) स्थानं गत्वा ततः (ग) स्थानं याते तेन (क) हस्तमितः प्रदेशोऽतिक्रान्तः । तथा च (क) स्थानात् (अ) स्थानं कियद्दूरे (अ) स्थानाच्च (ग) स्थानं कियद्दूरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$(\text{क})\ \text{स्थानात्}\ (\text{अ})\ \text{स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{1}{2}\text{क} \pm \frac{\sqrt{\text{अ}^2 - \frac{1}{2}\text{उआ}.\text{क}^2}}{2\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}\text{आ}}$$

$$(\text{अ})\ \text{स्थानाच्च}\ (\text{ग})\ \text{स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{1}{2}\text{क} \mp \frac{\sqrt{\text{अ}^2 - \frac{1}{2}\text{उआ}.\text{क}^2}}{2\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}\text{आ}}$$

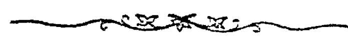
इति त्रिकोणमितितन्त्रे चतुर्थोऽध्यायः ।



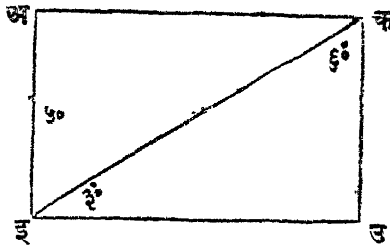
अथ

त्रिकोणमितौ ग्रन्थकृदुक्तविंशतिप्रश्नानां

सुवासनागणिताभ्यां सहोत्तराणि ।



(१) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अइउक आयतक्षेत्रं यस्यैको भुजः अइ=अ=५० हस्ताः । अत्र अइ-भुजस्य इ-प्रान्ते स्थित्वा उक-भुजस्य क-प्रान्तवेधेन लब्धाः कोणांशाः=३०°=आ । एवमिह इउक-जात्यत्रिभुजे

$$\frac{\text{ज्या}60^\circ}{\text{ज्या}30^\circ}=\frac{\text{इउ}}{\text{अइ}} \therefore \text{इउ}=\frac{\text{अइ}\times\text{ज्या}60^\circ}{\text{ज्या}30^\circ}$$

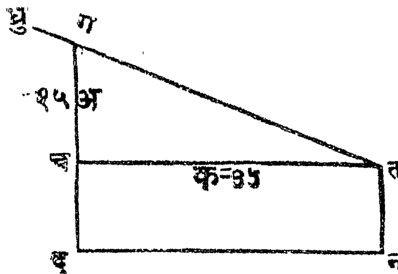
$$=\frac{\text{अइ}}{\frac{\text{ज्या}30^\circ}{\text{ज्या}60^\circ}}=\frac{\text{अइ}}{\text{स्प}30^\circ}=\frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \text{ । ज्या}30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{ज्या } 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \text{स्पआ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{इष्टभुजः} = \frac{\text{अ}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \text{अ} \times \sqrt{3} = 50\sqrt{3}$$

$= \sqrt{2500 \times 3} \quad = \sqrt{7500}$ अस्य ८१तमपृष्ठस्थनवीन-मूलानयनरीत्या मानम् = ८६·६०२५४।

(२) प्रश्नस्योत्तरम्।



कल्प्यते चतदन-समभूमेरुपरि पूर्वापरायता १५हस्तोच्छ्रिता भित्तिरस्ति। भित्तिमूलात् च-स्थानाद् दक्षिणतः त-स्थाने उत्थाय रात्रौ यद्युत्तरं विलोक्यते तदा ध्रुवतारा तद्भित्तेरग्रप्रदेशे ग-बिन्दावेव दृश्यते। अत्र ध्रुवोन्नतिरपेक्ष्या। उक्ते गचतत्रिभुजे अ, क, ग क्रमेण भुजाः, कोणाश्च आ, का, गा। जात्यत्वात् गा = ९०°।

$$\text{अत्र} \ \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \ \text{स्पआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

अतोऽस्य ९७तमपृष्ठस्थपञ्चमोदाहरणानुसारेण प्रघातमापकरूपम्।

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{स्पआ} = 10 + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क}$

$= 10 + \cdot 1760913 - \cdot 5440680 = 9\cdot 6320233$।

अत्र 'लघुरिकथ'-सारिणीतः $\text{प्रघा}_{\text{ह}}(२३^\circ \mid ११')$ $= ९\cdot६३१७०३७$

अथ $९\cdot६३२०२९५ - ९\cdot६३१७०३७ = ३२५८$

$\therefore \text{प्रघा}_{\text{ह}}(२३^\circ \mid ११') - \text{प्रघा}_{\text{ह}}(२३^\circ \mid १२') = ३४९०$

$$\therefore \frac{३२५८ \times ६०''}{३४९०} = \frac{१९५४८}{३४९} = ५६$$

$\therefore \text{प्रघा}_{\text{ह}}\text{स्पआ} = ९\cdot६३२०२९५ = \text{प्रघा}_{\text{ह}}(२३^\circ \mid ११' \mid ५६'')$

$\therefore$ आ-कोणः $= २३^\circ \mid ११' \mid ५६''$ इयमेव ध्रुवोन्नतिः ।

(३) प्रश्नस्योत्तरम् ।

ज न १८०-(आ+का) आ अ का गा द त

दतन-समानभूमाविष्टप्रमाणो जद्-वंशोऽस्ति यस्य द-मूलाद् दतप्रदेशस्य त-स्थाने कश्चिद् द्रष्टा स्थितः । तस्मात् ज-वंशाग्रवेधेन $\angle$ जतद $=$ गा $= ५७^\circ \mid ४०'$ । अथ दतमार्गमपहायान्यं तन-मार्गमनुसृत्य शतद्वयमिते तन-तुल्ये अ-प्रदेशे गतेन तेनैव द्रष्ट्रा वंशाग्रं विद्धम् । यत्र $\angle$ जनत $= \angle$ आ $= ५०^\circ \mid १२'$, एवं $\angle$ जतन $= \angle$ का $= ४०^\circ \mid २३'$ । अतः जतन-त्रिभुजे तजन-कोणस्यापि ज्ञानं सुलभम् । अत्र वंशोच्छ्रितिरवगम्या । एतदर्थं प्रथमं जतप्रमाणमानीयते तद्यथा—

$$\frac{\text{अ}}{\text{ज्या}\{१८० - (\text{आ} + \text{का})\}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ}+\text{का})} = \frac{\text{जत}}{\text{ज्याआ}}$$

$$\therefore \frac{\text{अ} \times \text{ज्या}\text{आ}}{\text{ज्या}(\text{आ}+\text{का})} = \text{जत}$$

$$\therefore \text{जद} = \frac{\text{जत} \times \text{ज्या}\text{गा}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्या}\text{आ} \times \text{ज्या}\text{गा}}{\text{ज्या}(\text{आ}+\text{का}) \times १}$$

$$\therefore \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{जद} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}\text{आ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}\text{गा}$$

$$- \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{आ}+\text{का}) - \text{प्रघा}_{\text{द}}१$$

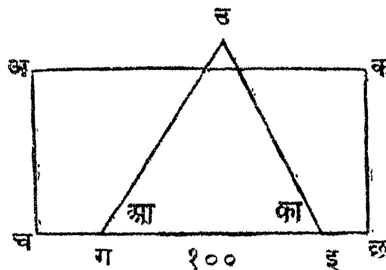
$$= ३०१०३०० + ९.९२६८३१४ + ९.८८५५२१५$$

$$- ९.९९९९७४८ - १०$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} २०.११३३८२९ \\ -१९.९९९९७४८ \\ \hline .११३४०८१ \end{array} \right. = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{जद} = \text{प्रघा}_{\text{द}}१२९.८४$$

$$\therefore \text{जद} = १२९.८४ ।$$

(४) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अकछच-प्रदेशे किमपि गृहं वर्त्तते यत्र वेध्यस्थानम् उ । तद्गृहं च यस्या नद्यास्तटेऽस्ति ततोऽन्यस्मिन् पारे अ-स्थाने विद्यमानेन केन चिद्द्रष्ट्रा तत् स्थानं विद्ध्वा तत एक शतहस्तमितं प्रदेशं तिर्यग्-गत्वा पुनस्तदेव स्थानं विद्धम् । तत्र कोणौ $\angle$आ $= ४०^\circ$ । २५′ $\angle$का $= ३७^\circ$ । ४८′ अतः स्थानद्वयाद्गृहान्तरे अपेक्ष्ये ।

$$१०० = \text{अ} । \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}\{१८०-(\text{आ}+\text{का})\}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ}+\text{का})} = \frac{\text{इउ}}{\text{ज्या}\text{आ}}$$

$$= \frac{\text{गउ}}{\text{ज्याका}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या(आ+का)}},$$

$$\text{एवम् गउ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ+का)}} \text{।}$$

द्वयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपं ।

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इउ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या(आ+का)}$

$= \cdot ०००००००+९\cdot ८११८०३८-९\cdot ९९०७५०२$

$= - \cdot १७८९४६४ = \cdot ८२१०५३६ = \text{प्रघा}_{\text{द}}(६६\cdot २३)$

$\therefore$ इउ $= ६६\cdot २३$ ।

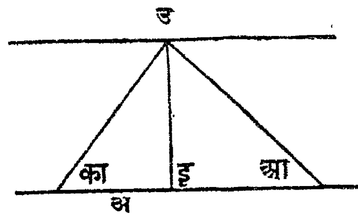
एवम् $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{गउ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या(आ+का)}$

$= \cdot ०००००००+९\cdot ७८७३९४६ - ९\cdot ९९०७५०२$

$= - \cdot २०३३५५६ = \cdot ७९६६४४४ = \text{प्रघा}_{\text{द}}(६२\cdot ६१)$

एवं यत्र ऋणमानं संपद्यते तत्र तद्रूपाद्विशोध्य धनमानमवगम्यम् ।

(५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते नद्या अपरतटस्थः कश्चिद् पदार्थः उ। आ-प्रदेशस्थेन तं विध्यता दृष्ट्वा आ-कोणो ज्ञातस्तथा अ-षष्टिमितं हस्तान्तरं तिर्यग्गत्वा ततस्तमेव विध्यता तेन का-कोणोऽपि ज्ञातः। एवं त्रिभुजस्य कोणाभ्यां तदन्तर्वर्त्तिना भुजेन च नदीविस्तारोऽवगम्यः ।

दर्शितक्षत्रे $१८०^\circ - (आ + का) =$ उकोणः ।

$\therefore उका = \frac{अ \times ज्या आ}{ज्या (आ + का)}$

$\therefore$ नदीविस्तारः $= उइ = \frac{अ \times ज्या आ \times ज्या का}{ज्या (आ + का) \times १}$

अस्य प्रघातमापकरूपम् ।

$प्रघा_{द} उइ = प्रघा_{द} अ + प्रघा_{द} ज्या आ + प्रघा_{द} ज्या का$

$\quad - प्रघा_{द} ज्या (आ + का) - १०$

$= ·७७८१५१३ + ९·८२७८८४३ + ९·८९९९५०६$

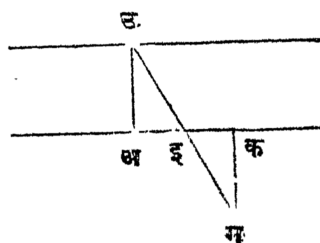
$\quad - ९·९९८४३१५ - १०$

$= २०·५०५९८६२ - १९·९९८४३१५$

$= ·५०७५५४७ = प्रघा_{द} ३२·१८$

$\therefore$ उइ = नदीविस्तारः = ३२·१८.... ।

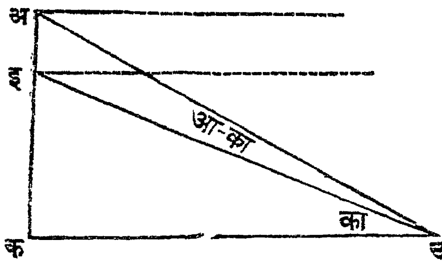
अथ केवलरेखागणितेनास्य प्रकारान्तरोपपत्तिः ।



अन्यथाऽपि नदीविस्तारोऽवगन्तुं शक्यते कल्प्यते—नद्या अपरपार्श्वे कश्चिद् उ-बिन्दुः । अ-बिन्दुस्थेन द्रष्ट्रा तथाऽवलोक्यते यथा नदीतटरूपायाम् अक-रेखायाम् उअ-रेखा लम्बरूपा भवेत् । तत इ-बिन्दुर्यावति दूरे यद्दिशि तवास्ति दूरे तद्दिश्येव क-बिन्दौ गत्वा तथा कग-रूपायां

लम्बरेखायां स द्रष्टा चलितो यथा इ-बिन्दुं पश्यन् उ-बिन्दुमपि पश्येत् तदा (रे.१अ.२६प्र) अउ = कग, अयमेव नदीविस्तारः सुसिद्धः ।

(६)प्रश्नस्योत्तरम् ।



अइ = गृहोच्च्यम् = अ । अ-बिन्दुर्गृहोर्ध्वप्रदेशः । इ-बिन्दुर्गृहतलप्रदेशः । उ-बिन्दुस्था महानौः । कउ = उच्छ्रितिप्रदेशमूलान्नौकाधिष्ठितप्रदेशदूरता ।

अस्मिन् प्रश्ने "गृहतलोर्ध्वदेशाभ्याम्"—इत्यत्र "गृहोर्ध्वतलदेशाभ्याम्"—इत्यनेन भवितव्यम् ।

अइउ-त्रिभुजे $इउ = \frac{अइ \times कोज्याआ}{ज्या(आ-का)}$,

कइउ-त्रिभुजे $कइ = \frac{इउ \times ज्याका}{१} = \frac{अइ \times कोज्याआ.ज्याका}{१ \times ज्या(आ-का)}$

$= \frac{अ \times कोज्याआ \times ज्याका}{१ \times ज्या(आ-का)}$ = उच्छ्रितिः ।

अत्रैव $कउ = \frac{अ \times कोज्याआ \times कोज्याका}{१ \times ज्या(आ-का)}$ = दूरता ।

द्वयोः प्रघातमापकरूपे ।

प्रघा॰कइ

= प्रघा$_\text{द}$अ + प्रघा$_\text{द}$कोज्याआ + प्रघा$_\text{द}$ज्याका − प्रघा$_\text{द}$ज्या(आ − का) − १०

= प्रघा$_\text{द}$४० + प्रघा$_\text{द}$कोज्या(४०° । १५′) + प्रघा$_\text{द}$ज्या(२५° । ३०′)

प्रघा$_\text{द}$ज्या(४०° । १५′ − २५° । ३०′) − १० ।

+ ·६०२०६००
+ ९·८८२६५६८
+ ९·६३३९८४४
− १०·
− ९·४०५८६१७

= + २०·११८७०१२ − १९·४०५८६१७ = ·७१२८३९५

= प्रघा$_\text{द}$५१·६२४८

∴ कइ = उच्छ्रितिः = ५१·६२४८ प्रश्नोत्तरे उच्छ्रितिः

कइ = १५·६२२५६ प्रायः प्रामादिकीति विज्ञेयम् ।

अथैवं प्रघा$_\text{द}$कउ

= प्रघा$_\text{द}$अ + प्रघा$_\text{द}$कोज्याआ + प्रघा$_\text{द}$कोज्याका

− प्रघा$_\text{द}$ज्या(आ − का) − १०

= प्रघा$_\text{द}$(४०) + प्रघा$_\text{द}$ज्या ४९° । ४५′) + प्रघा$_\text{द}$ज्या(६४° । ३०′)

− प्रघा$_\text{द}$ज्या(४०° । १५′ − २५° । ३०′) − १० ।

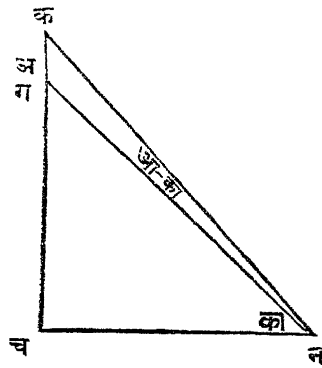
+ ·६०२०६००
+ ९·८८२६५६८
+ ९·९५५४८८२
− ९·४०५८६१७
− १०

= { + २०·४४०२०५० − १९·४०५८६१७ } = १·०३४३४३३

= प्रघा$_\text{द}$१०८·२२९७

∴ दूरता = १०८·२२९७ ।

(७) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र (न)पर्वतोपत्यकाभूमौ वेध्यस्थानम् । चग-पर्वतस्य ग-शिखरे कग-देवगृहम् । न-स्थानतो देवगृहाग्रवेधेन उन्नतांशाः $\angle$ कनच = आ, एवं देवगृहमूलवेधेन उन्नतांशाः $\angle$ गनच = का, कग = अ ।

आ = ५१° । ४०′ । का = ५०° । १५′ । अ = ५० हस्ताः ।

अत्र कनच-त्रिभुजस्य जात्यात्

$$\angle \text{चकन} = ९०° - \angle \text{कनच} \;\therefore\; \frac{\text{कग}}{\text{ज्या}\angle \text{कनग}} = \frac{\text{गन}}{\text{ज्या}\angle \text{गकन}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} = \frac{\text{गन}}{\text{कोज्या}\,\text{आ}}$$

$$\therefore\; \text{गन} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\text{आ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} \;।$$

$$\therefore\; \frac{\text{गन}}{१} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्या}\angle \text{गनच}} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\text{आ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्या}\,\text{का}}$$

$$\therefore\; \text{चग} = \text{पर्वतौच्च्यम्} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\text{आ} \times \text{ज्या}\,\text{का}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १}$$

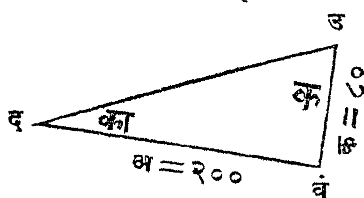
$$\therefore\; \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{चग} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या}\,\text{आ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}\,\text{का}$$

$$- \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(९०) .$$

$$\left\{\begin{array}{r} \cdot६९८९७०० \\ +९\cdot७९२५५६६ \\ +९\cdot८८९८३७० \\ \hline +२०\cdot३७७३६३६ \\ -\ ८\cdot३९३१००८ \\ -१० \\ \hline १\cdot९८४२६२८ \end{array}\right\}$$ ∴ प्रघा$_{द}$चग $= १\cdot९८४२६२८$

∴ चग $= ९६४\cdot४१२६$ एतदेव पर्वतोच्चयम् ।

(८) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अस्मिन् प्रश्ने प्रासादो वर्त्तते इत्यत्र "प्रासादे वर्त्तते" इत्यशुद्धिः । द-सरसो दक्षिणभागः । उ-उत्तरभागः । वं-पूर्वभागे द-स्थानात् अ-हस्तान्तरे तथा उ-स्थानात् क-हस्तान्तरे वंशमूलम् । अत्र वंदउ-कोणो वेधेन ज्ञातः = का, दवं = अ, उवं = क ।

∴ (३८) प्रक्रमतः कोज्याका $= \dfrac{अ^{२} + दउ^{२} - क^{२}}{२अ.दउ}$

∴ $क^{२} - अ^{२} = दउ^{२} - २अ.दउ.$कोज्याका

∴ $क^{२} - अ^{२} + अ^{२}$.कोज्या^{२}का

$= दउ^{२} - २अ.दउ.$कोज्याका $+ अ^{२}$. कोज्या^{२}का

$क^{२} - अ^{२}(१ -$ कोज्या^{२}का)

∴ $\pm$मू $=$ दउ $-$ अ.कोज्याका ∴ अ.कोज्याका $\pm$ मू $=$ दउ

∴ दउ $=$ अ.कोज्याका $+ \sqrt{क^{२} - अ^{२}.\text{ज्या}^{२}\text{का}}$

वा दउ $=$ अ.कोज्याका $- \sqrt{क^{२} - अ^{२}.\text{ज्या}^{२}\text{का}}$

अत्र अ.कोज्याका = ग कल्प्यते, तदा प्रघा$_{द}$ग

$$= \text{प्रघा}_{\text{दृ}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{दृ}}\text{कोज्याका} = \left\{ \begin{array}{r} २\cdot३०१०३०० \\ ९\cdot९६९३२११ \\ \hline १२\cdot२७०३५१२ \end{array} \right\}$$

$\therefore$ ग $=$ १८६·३६१ । अथ $\text{क}^{२} - \text{अ}^{२}.\text{ज्या}^{२}\text{का}$ एतन्मूलार्थं

$\text{अ}^{२}.\text{ज्या}^{२}\text{का} = \text{च}^{२}$ कल्प्यते तदा $\text{प्रघा}_{\text{दृ}}\text{च}$

$$= \text{प्रघा}_{\text{दृ}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{दृ}}\text{ज्याका} = \left\{ \begin{array}{r} २\cdot३०१०३०० \\ ९\cdot५५९८८२९ \\ \hline ११\cdot८६०९१२९ \end{array} \right\}$$

$\therefore \text{प्रघा}_{\text{दृ}}\text{च}^{२} = २(११\cdot८६०९१२९) = २३\cdot७२१८२५८$

$\therefore \text{च}^{२} = ५२७०\cdot१८$

$\therefore \text{दृ}\text{उ} = \text{अ}.\text{कोज्याका} \pm \sqrt{\text{क}^{२} - \text{अ}^{२}.\text{ज्या}^{२}\text{का}}$

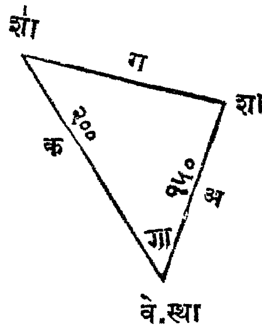
$= \text{ग} \pm \sqrt{\text{क}^{२} - \text{च}^{२}} \quad = \text{ग} \pm \sqrt{६४०० - ५२७०\cdot१८}$

$= \text{ग} \pm \sqrt{११२९\cdot८२} \quad = \text{ग} \pm ३३\cdot६११$

$= १८६\cdot३६१ \pm ३३\cdot६११ = \left\{ \begin{array}{l} २१९\cdot९७२ \\ \text{वा } १५२\cdot७५ \end{array} \right\}$

$\therefore \text{दृ}\text{उ} = २१९\cdot९७२$ वा $१५२\cdot७५$

(९) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र शां, शा शाल्मलीवृक्षौ, वे.स्था वेध्यस्थानम् । ततः अ, क भुजौ तदन्तर्गतकोणश्चैते ज्ञाताः । एभ्यो ग-भुजप्रमाणमन्वेष्यम् ।

(३८) प्रक्रमत: कोज्यागा $=\frac{\text{अ}^2+\text{क}^2-\text{ग}^2}{२\text{अ}.\text{क}}$

$\therefore$ २अ.क.कोज्यागा $=$ अ$^2+$क$^2-$ग^2

$\therefore$ ग$^2=$ अ$^2+$क$^2-$ २अ.क.कोज्यागा

$\therefore$ ग $=\sqrt{\text{अ}^2+\text{क}^2-२\text{अ}.\text{क}.\text{कोज्यागा}}$

अत्र २अ.क.कोज्यागा $=$ च

$\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$च $=$ प्रघा$_{\text{द}}$२ $+$ प्रघा$_{\text{द}}$अ $+$ प्रघा$_{\text{द}}$क $+$ प्रघा$_{\text{द}}$कोज्यागा

$=\left\{\begin{array}{r}\cdot३०१०३०० \\ २\cdot१७६०९१३ \\ २\cdot३०१०३०० \\ ९\cdot८०३९६९९\end{array}\right\}$ $\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$ च $=$ १४·५८२१२१२

१४·५८२१२१२

$\therefore$ च $=$ ३८२०५·११४

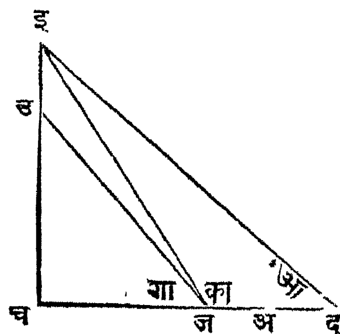
$\therefore$ ग $=\sqrt{\text{अ}^2+\text{क}^2-३८२०५\cdot११४}$

$=\sqrt{२२५००+४००००-३८२०५\cdot११४}$

$=\sqrt{६२५००-३८२०५\cdot११४}$

$=\sqrt{२४२९४\cdot८८६}=१५५\cdot८७$

(१०) प्रश्नस्योत्तरम् ।



चउ = पर्वतौच्च्यम्, तत्र उइ-स्तम्भः, द-प्रथमवेध्यस्थानम् । ज-पर्वताधःप्रदेशस्थं द्वितीयवेध्यस्थानम् । इदज-कोणः = आ = ३१° । २०′, इजच-कोणः = का = ४५° । ४२′, उजच-कोणः = गा = ३५° । ३३′ जद = अ = १५०, अत्र पर्वतौच्च्यं स्तम्भोच्छ्रितिश्चैते अपेक्ष्ये ।

दजइ-त्रिभुजे जइद-कोणः = का − आ,

$$\therefore \text{इज} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{का} - \text{आ})}$$

∴ इउज-त्रिभुजे इजउ-कोणः = का − गा

$$\therefore \text{इउ} = \frac{\text{इज} \times \text{ज्या}(\text{का} - \text{गा})}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{ज्या}(\text{का} - \text{गा})}{\text{ज्या}(\text{का} - \text{आ})\ \text{कोज्यागा}} \text{ ।}$$

$$\text{इजउ-त्रिभुज एव जउ} = \frac{\text{इज} \times \text{कोज्याका}}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{कोज्याका}}{\text{ज्या}(\text{का} - \text{आ})\ \text{कोज्यागा}},$$

$$\therefore \text{उच} = \frac{\text{जउ} \times \text{ज्यागा}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{कोज्याका} \times \text{ज्यागा}}{१ \times \text{ज्या}(\text{का} - \text{आ})\ \text{कोज्यागा}}$$

अनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इउ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{का} - \text{गा})$$
$$- \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{का} - \text{आ}) - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + \quad ·१७६०९१३ \\ + \ ९·७१६०१६८ \\ + \ ९·२४६०६९५ \\ \hline + १९·१३८१७७६ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{r} + \ ९·३९४६७२९ \\ + \ ९·९१०४१५५ \\ \hline + १९·३०५०८८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} + & १९\cdot१३८१७७६ \\ - & १९\cdot३०५०८८४ \\ \hline - & \cdot१६६९१०८ \\ + & \cdot८३३०८९२ \end{array} \right\}$$

$\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$इउ $= \cdot८३३०८९२$ $\therefore$ इउ $= ६८\cdot०३६$

प्रघा$_{\text{द}}$उच = प्रघा$_{\text{द}}$अ + प्रघा$_{\text{द}}$ज्याआ + प्रघा$_{\text{द}}$कोज्याका +

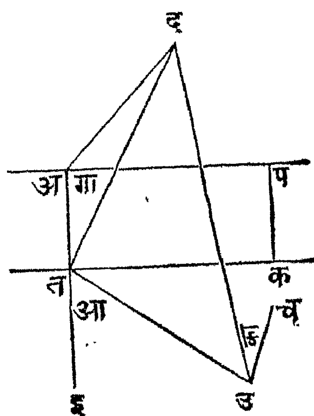
प्रघा$_{\text{द}}$ज्यागा $-$ १० $-$ प्रघा$_{\text{द}}$ज्या(का $-$ आ) $-$ प्रघा$_{\text{द}}$कोज्यागा

$$= \left\{ \begin{array}{ll} + & \cdot१७६०९२३ \\ + & ९\cdot७१६०१६८ \\ + & ९\cdot८४४११३७ \\ + & ९\cdot७६४४८४९ \\ \hline + & २९\cdot५००७०६७ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ll} + & १०\cdot \\ + & ९\cdot३९४६५२९ \\ + & ९\cdot९१०४१५५ \\ \hline + & २९\cdot३०५०६८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} + & २९\cdot५००७०६७ \\ - & २९\cdot३०५०६८४ \\ \hline & \cdot१९५६३८३ \end{array} \right\}$$

$\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$उच $= \cdot१९५६३८३$ $\therefore$ उच $= १५६\cdot८९८५$

(११) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते अपकत = नद्याकृतिभागः । यत्र अ-अपरभागे, अद = देवगृहौच्च्यम् । तउ = (वेध्यपारे) प्रवणभूप्रदेशः । तत्र उ = उच्चभूप्रदेशचिह्नम्, त = तलप्रदेशचिह्नम् । अइ-रेखा त-बिन्दुतः क्षितिजसमानान्तरधरातलगता अप-रेखोपरि तथा तक-रेखोपरि लम्बरूपा, त-स्थानात् प्रावण्यकोणः = आ, त-स्थानाद् देवमन्दिराग्रवेधेनोन्नतांशाः = का, उ-स्थानाद् देवमन्दिराग्रवेधेनोन्नतांशाः = गा, अतः अत-नदीविस्तृतेस्तथा अद-मन्दिरौच्च्यमानस्य च ज्ञानमपेक्ष्यम् ।

अत्रेदमवधेयं यत् उ-स्थानात् क्षितिजसमानान्तरधरातलं तद्वर्धितदेवमन्दिराग्ररेखां स्पृशेत् त-स्थानतस्तथा उ-स्थानतश्च क्षितिजसमानान्तरधरातलान्तरादल्पं मन्दिरौच्च्यमिति ।

अत्रोपपत्तिः । तइ, उच-रेखे समानान्तरे तउ-रेखया छिन्ने $\therefore \angle \text{इतउ} = \text{आ} = \angle \text{तउच} \quad \therefore \angle \text{तउच} - \angle \text{दउच} = \text{आ} - \text{का} = \angle \text{तउद}$ ।

अथ $\angle \text{दतउ} = 180^\circ - (\text{आ} + \text{गा})$

$$\therefore \angle \text{तउच} + \angle \text{दतउ} = 180^\circ - (\text{आ} + \text{गा}) + (\text{आ} - \text{का})$$

$$= 180^\circ - (\text{का} + \text{गा}) \quad \therefore \angle \text{तदउ}$$

$$= 180^\circ - \{180^\circ - (\text{का} + \text{गा})\} = \text{का} + \text{गा}$$

$$\therefore \text{तद} = \frac{\text{तउ} \times \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}{\text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})}$$

$$\therefore \text{अत} = \frac{\text{तउ} \times \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \ \text{कोज्यागा}}{1 \times \text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})}$$

$$\text{अद} = \frac{\text{तउ} \times \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \ \text{ज्यागा}}{1 \times \text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})}$$

अत्र $\text{तउ} = \text{अ}$

$\therefore$ अनयोः प्रघातमापकरूपे—

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अत} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})$$

$$+ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्यागा} - 10 - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})$$

+ ·३०१०३००
+ ९·६६८०२६५
+ ९·९४०४०९१
+१९·९०९४६५६
−१०·
− ९·८१५४८५४
·०९३९८०२ ∴ प्रघा$_{द}$अत = ·०९३९८०२

∴ अत = १२४·१६ इयं नदीविस्तृतिः।

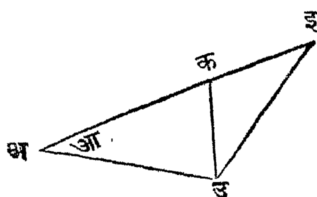
प्रघा$_{द}$अद = प्रघा$_{द}$अ + प्रघा$_{द}$ज्या(आ − का)
+ प्रघा$_{द}$ज्यागा − १० − प्रघा$_{द}$ज्या(का + गा)

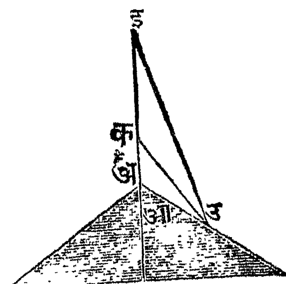
+ ·३०१०३००
+ ९·६६८०२६५
+ ९·६९००९८३
+१९·६५९१९४८
−१०·
− ९·८१५४८५४
·८४३६६९४

∴ प्रघा$_{द}$अद = ·८४३६६९४

∴ अद = ६९·७७ इयं देवगृहोच्छ्रितिः।

(१२) प्रश्नस्योत्तरम्।





अउ-प्रवणभूमौ निखनितः अइ-वंशोऽस्ति। अयं भग्नः सन् अ-मूलात् षोडशहस्तान्तरे उ-स्थाने लग्नस्तदा अक-प्रमाणं कियदिति प्रश्नः।

अत्र उ-स्थानलग्नःकोणः प्राचण्यम् = आ, ∴ ∠कअउ = आको,

अउक-त्रिभुजे (३८) प्रक्रमतः—

$$\text{ज्याआ} = \frac{\text{अउ}^2 + \text{अक}^2 - \text{कउ}^2}{2\,\text{अउ}.\text{अक}}$$, द्वितीयपदे कोटिज्याया ऋणत्वात्

$$\text{कउ}^2 = \text{अउ}^2 + \text{अक}^2 + 2\,\text{अउ}.\ \text{अक}.\ \text{ज्याआ},$$

$$\text{कउ} = \text{अइ} - \text{अक} \ \therefore\ \text{कउ}^2 = \text{अइ}^2 - 2\,\text{अइ}.\text{अक} + \text{अक}^2,$$

$$\therefore \text{अइ}^2 - 2\,\text{अइ}.\text{अक} + \underline{\text{अक}^2} = \text{अउ} + \underline{\text{अक}^2} + 2\ \text{अउ}.\text{अक}.\text{ज्याआ}$$

$$\therefore\ \text{अइ}^2 - \text{अउ}^2 = 2\,\text{अइ}.\text{अक} + 2\,\text{अउ}.\text{अक}.\text{ज्याआ}$$

$$= \text{अक}\ 2(\text{अइ} + \text{अउ}.\ \text{ज्याआ})$$

$$\therefore\ \text{अक} = \frac{\text{अइ}^2 - \text{अउ}^2}{2(\text{अइ} + \text{अउ}.\text{ज्याआ})}$$

अत्र हरे $2(\text{अइ} + \text{अउ}.\text{ज्याआ})$ द्वितीयखण्डस्य प्रघातमापक-रूपम् ।

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अउ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ}$$

$$= \left.\begin{matrix} \cdot २०४१२०० \\ ९\cdot ५३४०५१७ \end{matrix}\right\} = ९\cdot ७३८१७१७$$

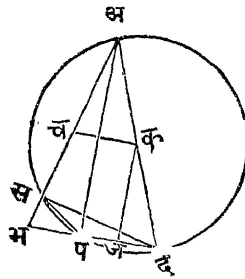
$$\therefore\ 2(\text{अइ} + ५\cdot ४९५) = 2(३२ + ५\cdot ४९५)$$

$$= 2(३७\cdot ४९५) = ७४\cdot ९९$$

$$\therefore\ \text{अक} = \frac{\text{अइ}^2 - \text{अउ}^2}{2(\text{अइ} + \text{अउ}.\text{ज्याआ})} = \frac{१०२४ - २५६}{७४\cdot ९९}$$

$= १०\cdot २४\cdots\cdots$ ।

(१३) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कुत्रापि समानभूमौ स्थित्वा कस्य चिदुच्चभूमिष्ठस्य स्तम्भस्याग्रमूलगतसूत्रोत्पन्नकोणो यदि तस्यामेव समानभूमौ स्थानान्तरे स्थितवता विध्यता जनेन पूर्वविद्धाग्रमूलोत्पन्नकोणसमानः कोणः प्राप्तस्तदा स्तम्भप्रमाणरूपाधारे त्रिभुजद्वयमुत्पद्यते ययोः शीर्षलग्नावाधारसंमुखौ कोणौ समानावतस्तत् त्रिभुजद्वयमेकवृत्तान्तर्गतम् । इयमेव संस्थाऽस्मिन् १३प्रश्नेऽप्यतोऽत्र प्रथमवेधस्थानम् (प), द्वितीयवेधस्थानम् (द), स्तम्भमूलम् (स), स्तम्भाग्रम् (अ), चैतेभ्यश्चतुर्भ्यो बिन्दुभ्यश्चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतम् । वेधस्थानान्तरम् दप = २०० = क । अग्रमूलोत्पन्नकोणः $\angle$ सपअ = $\angle$ सदअ = आ = ९° । ४०′ । स्तम्भप्रमाणम् = अस = १२० = अ ।

$$\therefore \text{अदपस-वृत्तव्यासार्धम्}\ \frac{\frac{\text{अस}}{२}\times १}{\text{ज्याआ}} = \frac{\text{अस}}{२\text{ज्याआ}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{२\text{ज्याआ}} = \text{कद},$$

$$\therefore \text{कद}^२ - \text{जद}^२ = \text{कद}^२ - \left(\frac{\text{दप}}{२}\right)^२ = \text{कद}^२ - \left(\frac{\text{क}}{२}\right)^२$$

$$= \frac{\text{अ}^२}{४\text{ज्या}^२\text{आ}} - \frac{\text{क}^२}{४} = \frac{१}{४}\left(\frac{\text{अ}^२}{\text{ज्या}^२\text{आ}} - \text{क}^२\right)$$

$= \text{चभ}^{2} \therefore \frac{१}{२}\sqrt{\frac{\text{अ}^{2}}{\text{ज्या}^{2}\text{आ}} - \text{क}^{2}} = \text{चभ}$

$\therefore \frac{१}{२}\sqrt{\frac{\text{अ}^{2}}{\text{ज्या}^{2}\text{आ}} - \text{क}^{2}} - \frac{\text{अ}}{२} = \text{चभ} - \text{सच}$

$\therefore \text{भस} = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{\frac{\text{अ}^{2}}{\text{ज्या}^{2}\text{आ}} - \text{क}^{2}} - \text{अ}\right\}$

$= \frac{१}{२}\left\{\sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{2} - \text{क}^{2}} - \text{अ}\right\}$ इदमेव पर्वतौच्च्यम् ।

अत्र कोष्ठकान्तर्गतप्रथमखण्डस्य

प्रघातमापकरूपार्थं यदि $\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{2} = \text{इ}^{2}$ कल्प्यते

तदा $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या आ}$

$$\begin{array}{r} + \;\; ·०७९१८१२ \\ - ९·२२५०९१८ \\ \hline ·८५४०८९४ \end{array} \quad \therefore \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इ} = ·८५४०८९४$$

$\therefore \text{इ} = ७१४·६४१९ \;\therefore \text{इ}^{2} = ५१०७१३·०२५२३५६१$

$\therefore \left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{2} - \text{क}^{2} = ५१०७१३·०२५ - ४००००$

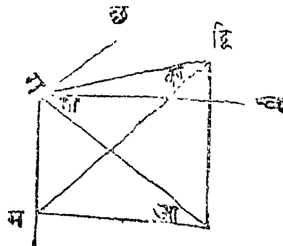
$= ४७०७१३·०२५$

$\therefore \sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{2} - \text{क}^{2}} = ६८६·०८$

$\therefore \frac{१}{२}\left\{\sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{2} - \text{क}^{2}} - \text{अ}\right\} = २८३·०४$

इदमेव पर्वतौच्च्यमानमिति ।

(१४) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते

अत्र $\quad$ मग = राजसदनोच्छ्रितिः ।

प्र = प्रथमवृक्षमूलम् ।

द्वि = द्वितीयवृक्षमूलम् ।

प्र-द्वि = वृक्षमूलान्तरम् ।

गच-गछ-रेखे अधरांशकोणज्ञानार्थं विहिते तदर्थमस्यैव ११५त पृष्ठस्था टिप्पण्यवलोक्या ।

गमप्रत्रिभुजस्य जात्यत्वात् $\text{गप्र} = \dfrac{\text{गम} \times १}{\text{ज्या अ}}$

गमद्वित्रिभुजस्यापि जात्यत्वात् $\text{गद्वि} = \dfrac{\text{गम} \times १}{\text{ज्या का}}$

∴ गप्रद्वि-त्रिभुजे 'प्रद्वि' वृक्षमूलान्तरमज्ञातं ततोऽस्यैव (३ प्रक्रमतः—

$$\frac{\text{गप्र}^2 + \text{गद्वि}^2 - \text{प्रद्वि}^2}{२\,\text{गप्र}.\text{गद्वि}} = \text{कोज्या गा} ।$$

$$\therefore \text{गप्र}^2 + \text{गद्वि}^2 - \text{प्रद्वि}^2 = \text{कोज्या गा} \times २\,\text{गप्र}.\text{गद्वि} ।$$

$$\therefore \text{प्रद्वि}^2 = \text{गप्र}^2 + \text{गद्वि}^2 - \text{कोज्या गा} \times २\,\text{गप्र}.\text{गद्वि}$$

$$= \frac{\text{गम}^2}{\text{ज्या}^2\text{आ}} + \frac{\text{गम}^2}{\text{ज्या}^2\text{का}} - \frac{\text{कोज्या गा} \times २\,\text{गम}^2}{\text{ज्या आ}.\text{ज्या का}}$$

$$= गम^2\left(\frac{१}{ज्या^2 आ}+\frac{१}{ज्या^2 का}-\frac{२कोज्यागा}{ज्याआ.ज्याका}\right)$$

$$\therefore प्रद्वि = गम\sqrt{कोछे^2 आ + कोछे^2 का - २कोछेआ.कोछेका.कोज्यागा}$$

$$= अ\sqrt{\frac{१}{ज्या^2 आ}+\frac{१}{ज्या^2 का}-२ कोज्यागा\times\frac{१}{ज्याआ.\ ज्याका}}$$

अत्र हस्तादिमानानयनार्थं 'लघुरिकथ'-सारिणीतः प्रघातमापकरूपायास्य खण्डचतुष्टयं कृतम् । अ, $\frac{१}{ज्या^2 आ}$, $\frac{१}{ज्याका}$, $\frac{२कोज्यागा}{ज्याआ.ज्याका}$ ।

$\frac{१}{ज्या^2 आ} = क$, $\frac{१}{ज्या^2 आ} = ग$, $\frac{२कोज्यागा}{ज्याआ.ज्याका} = घ$

$\therefore प्रघा_{द} क = २० - प्रघा_{द} २ज्याआ$, $प्रघा_{द} ग = २० - प्रघा_{द} २ज्याका$,

$प्रघा_{द} घ = प्रघा_{द} २ + प्रघा_{द} कोज्यागा + १० - प्रघा_{द} ज्याया -$ $प्रघा_{द} ज्याका$ ।

$\therefore प्रघा_{द} क = २० - २(८\cdot७०९०४९०) = २० - १७\cdot४१८०९८०$

$= २\cdot५८१९०२०$ $\therefore क = ३२४\cdot२८६२$ ।

$प्रघा_{द} ग = २० - २(८\cdot७४४५३६०) = २० - १७\cdot४८९०७२०$

$= २\cdot५१०९२८०$ $\therefore ग = ३८१\cdot८५८२$

$प्रघा_{द} घ = \cdot३०१०३०० + ९\cdot९९३७६७९ + १० - ८\cdot७०९०४९०$ $- ८\cdot७४४५३६०$

$= २०\cdot२९४७९७९ - १७\cdot४५३५८५० = २\cdot८४१२१२९$

$\therefore घ = ६९३\cdot७६९९$

$\therefore प्रद्वि = अ\sqrt{क+ग-घ}$

$= १००\sqrt{३२४\cdot२८६२+३८१\cdot८५८२-६९३\cdot७६९९}$

$= १००\sqrt{७०६\cdot१४४४-६९३\cdot७६९९}$

$$=१०० \sqrt{१२\cdot३७८९}=१०० \times ३\cdot५१८७$$
$$=३५१\cdot८७\ldots\ldots ।$$

प्रश्नान्ते उत्तरम् ३५४·३४९ इदमशुद्धम् ।

(१५) प्रश्नस्योत्तरम् ।

अत्र पूर्वा-परायता पूल-मितद्वादशहस्तोच्छ्रिता पूलतमू-भित्तिस्तथा द्वादशहस्तोच्छ्रितैव याम्योत्तरा छयदमू-भित्तिरन्या पश्चिमदिशि संलग्नाऽस्ति इष्टसमये पूर्वकपाले द्वयोर्भित्त्योश्छाये समानभूमौ पतिते । ययोः पूर्वापरभित्तेश्छाया क-मितोत्तरस्यां दिशि पतिता तथा याम्योत्तरभित्तेश्छाया ग-मिता पश्चिमस्यां दिशि पतिता । अत्र रवेरुन्नतांशास्तत्र दिगंशाश्च के इति प्रश्नः । इह क-मितो भुजः, ग-मिता कोटिः, मूच-मितः कर्णः । वास्तविको भुजश्च क, ग-मिता कोटिस्ततो वास्तविकी छाया मूच-मिता $=\sqrt{क^२+ग^२}$ । अथ मूचअ-जात्यत्रिभुजे

$$ज्या\angle चमूअ = ज्यादि = \frac{१\times चअ}{मूच} = \frac{१\times क}{\sqrt{क^२+ग^२}}$$

अत्र $\sqrt{क^२+ग^२}=\sqrt{४^२+३^२}=\sqrt{२५}=५$ ।

$\therefore$ ज्यादि $=\frac{१\times क}{५}$ $\therefore$ प्रघातमापकरूपे

$$प्रघा_{द}ज्यादि = प्रघा_{द}क + १० - प्रघा_{द}\,५$$
$$=\cdot६०२०६०० + १० - \cdot६९८९७०० = ९\cdot९०३०९००$$

$\therefore$ पूर्वकपाले उत्तरा दिगंशाः $=$ ज्या$^{-1}\cdot \dfrac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^2+\text{ग}^2}}$

$=$ ज्या$^{-1}\cdot$ ९·९०३०९०० $=$ ५३° । ७′ । ४८″ ।

अथोन्नतांशार्थमुपायः । पूर्वोक्तक्षेत्रे सूच-मितैव छाया भुजो द्वादश कोटिरनयोर्वर्गान्तरपदं कर्णः, एवं दृग्ज्या भुज उन्नतांशज्या शङ्कुः कोटिस्त्रिज्या कर्णश्चानयोः क्षेत्रयोः साजात्यं प्रसिद्धमतः

$$\frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{\text{ज्याउन्न}}{\text{ज्यादृ}} = \text{स्पउन्न} ।$$

$$\therefore \text{स्पउन्न} = \frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^2+\text{ग}^2}}$$

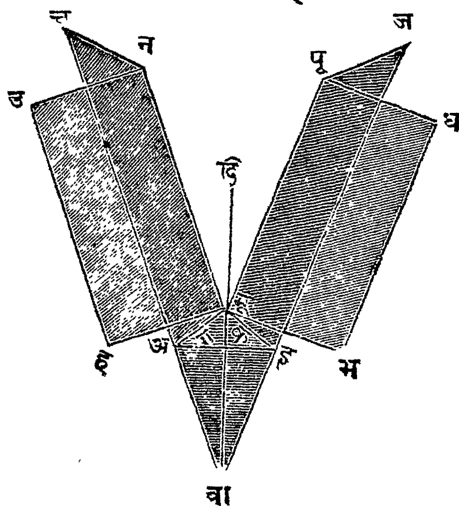
$\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$स्पउन्न $=$ प्रघा$_{\text{द}}$अ $+$ १० $-$ प्रघा$_{\text{द}}$५

$=$ १·०७९१८१२ $+$ १० $-$ ·६९८९७००

$=$ १०·३८०२११२ । $\therefore$ उन्नतांशाः $=$ स्प$^{-1}\cdot \dfrac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^2+\text{ग}^2}}$

$=$ स्प$^{-1}\cdot$ १०·३८०२११२ $=$ ६७° । २२′ । ४८″ ।

(१६) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यतामिह पूर्वापरा अ-हस्तोच्छ्राया धमू-भित्तिरस्ति तथा तदुच्छ्रायैवान्योत्तरभागे पू-पूर्वचिह्नात् आ-कोणान्तरे गता मूउ-भित्तिरस्ति ययोश्छाया धमू-भित्तेर्दक्षिणतस्तथा मूउ-भित्तेरुत्तरपश्चिमतश्च मिलिता पूजवाचनमू-रूपा भूमौ पतिता। तत्र मूधभित्तेश्छायाविस्तृतिः मूइ-रेखा क-मिता तथाऽन्यभित्तेश्छायाविस्तृतिः मूअ-रेखा ग-मिता, एते छाये तथा पूमूदि-कोणो वा तत्तुल्य इवाअ-कोणश्चेति त्रयं ज्ञात्वा दिगंशा उन्नतांशाश्च कियन्त इति प्रश्नः।

अत्र वाअमू-कोणस्तथा वाइमू-कोणश्च नवत्यंशामितोऽतः अवाइमू-चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतम्। तत्र अवाइ-कोणः आ-मितोऽतः $१८० - आ =$ $\angle$ इमूअ।

$$\therefore - कोज्याआ = \frac{क^२ + ग^२ - अइ^२}{२कग}$$

$$\because अइ = \sqrt{क^२ + ग^२ + २क.ग.कोज्याआ}$$

उक्तचतुर्भुजस्य वृत्तान्तर्गतत्वात् $\angle$ इअमू $= \angle$ इवामू, किन्तु इवामू $= \angle$ पूमूदि $=$ दिगंशाः।

$\therefore \angle$ इवामू $=$ दिगंशाः।

$$\therefore ज्यादि = \frac{ज्याआ \times क}{\sqrt{क^२ + ग^२ + २क.ग.कोज्याआ}}$$

$$अत्र\ हरस्वरूपम् = \sqrt{३^२ + ४^२ + २ \times ३ \times ४ \times कोज्याआ}।$$

$$\therefore ह^२ = २५ + २४ \times कोज्याआ।$$

$$= २५ + २४ \times \cdot ३८२६८३४$$

$$= २५ + ९\cdot १८४४०१६ = ३४\cdot १८४४०१६।$$

$$\therefore \sqrt{३४\cdot १८४४०१६} = ५\cdot ८४६७...$$

$$\therefore \quad \text{ज्यादि} = \frac{\text{ज्याआ.क}}{५\cdot८४६७\ldots} = \frac{\cdot९२३८७९५ \times ३}{५\cdot८४६७\ldots}$$

$$= \frac{२\cdot७७१६३८५}{५\cdot८४६७\ldots} = \cdot४७४०५१७\ldots\ldots$$

$\therefore$ दिगंशा उत्तरा: $= २८^\circ । १७'$ .... ।

अथोन्नतांशा: साध्यन्ते । वास्तविकी छाया वामू-मिता

$$= \frac{\text{क} \times १}{\text{ज्यादि}} \text{ (वाइमू-क्षेत्रे द्रष्टव्यम्)}$$

$$= \frac{\text{क} \times १ \sqrt{\text{क}^२ + \text{ग}^२ + २\text{क.ग.कोज्याआ}}}{\text{ज्याआ.क}}$$

$$= \frac{१ \times \sqrt{\text{क}^२ + \text{ग}^२ + २\text{क.ग.कोज्याआ}}}{\text{ज्याआ}}$$

$$\therefore \text{स्पउन्न} = \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{ग}^२ + २\text{क.ग.कोज्याआ}}}$$

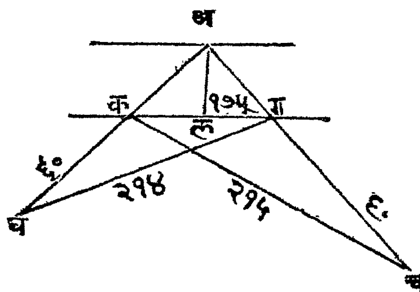
[अत्र अ = १२हस्ता: शङ्कुर्हस्तात्मक: कल्पित:] ।

$$= \frac{१२ \times \cdot९२३८७९५}{५\cdot८४६७\ldots} = \frac{११\cdot०८६५५४०}{५\cdot८४६७०००}$$

$$= \frac{११०८६५५४}{५८४६७००} = १\cdot८९६२०७१$$

$\therefore$ उन्नतांशा: पूर्वकपालीया: $= ६२^\circ । ११'$............................।

(१७) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अवाक्तीरस्थः सरलप्रदेशः कग = १७५, कघ = ६०, गघ = २१४, गच = ९०, कच = २१५, एभ्यः अल-प्रमाणो नद्या विस्तारोऽपेक्ष्यः।

(३८ प्रक्रमतः) कगच-त्रिभुजे कोज्या $\angle$कगच $= \dfrac{\text{कच}^2 - \text{कग}^2 - \text{गच}^2}{२\text{कग}.\text{गच}}$

$= \dfrac{(२१५^2) - (१७५^2 + ९०^2)}{२ \times १७५ \times ९०} = \dfrac{७५००}{३१५००}$

$=$ ·२३८०९५२.... $\therefore$ $\angle$अगक $=$ ७६° । १३′ । ३३″ ।

एवम् कोज्या $\angle$गकघ $= \dfrac{\text{घग}^2 - \text{कघ}^2 - \text{कग}^2}{२\text{कघ}.\text{कग}}$

$= \dfrac{(२१४^2) - (१७५^2 + ६०^2)}{२ \times १७५ \times ६०} = \dfrac{११५७१}{२१०००} =$ ·५५१

$\therefore$ $\angle$अकग $=$ ५६° । ३३′ । ८″ । $\therefore$ $\angle$अगक $+$ $\angle$अकग

$=$ (७६° । १३′ । ३३″) $+$ (५६° । ३३′ । ८″) $=$ १३२° । ४६′ । ४१″ ।

$\therefore$ $\angle$कअग $=$ ४७° । १३′ । १९″ ।

$\therefore$ अग $= \dfrac{१७५ \times \text{ज्या}(५६° । ३३′ । ८″)}{\text{ज्या}(४७° । १३′ । १९″)}$

$\therefore$ अगल-त्रिभुजेऽनुपाततः

अल $= \dfrac{१७५ \times \text{ज्या}(५६° । ३३′ । ८″) \text{ ज्या}(७६° । १३′ । ३३″)}{१ \times \text{ज्या}(४७° । १३′ । १९″)}$

$\therefore$ प्रघातमापकरूपम्—

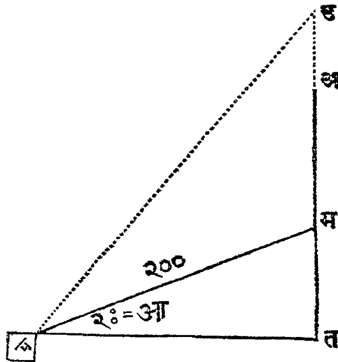
प्रघा$_\text{द}$अल $=$ प्रघा$_\text{द}$१७५ $+$ प्रघा$_\text{द}$ज्या(५६° । ३३′) $+$ प्रघा$_\text{द}$ज्या (७६° । १४′) $-$ १० $-$ प्रघा$_\text{द}$ज्या(४७° । १३′)

$$= \left\{ \begin{array}{ll} + २\text{·}२४३०३८५ & - १० \\ + ९\text{·}९८७३४१३ & \underline{-\ ९\text{·}८६५६५३१} \\ \underline{+\ ९\text{·}९८१३५७२} & - १९\text{·}८६५६५३१ \\ + २२\text{·}१५१७३७० & \end{array} \right\}$$

$=(+२२\cdot१५१७३७० - १९\cdot८६९६५३१) = २\cdot२८६०८३९$

$\therefore$ अल $=$ १९२·२३३ हस्ताः, इदमेव पात्रप्रमाणम् । प्रश्नान्ते पात्र-प्रमाणम् $=$ २००·८६२८ हस्ताः, इदमशुद्धम् ।

(१८) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यतेऽत्र क्रमनिम्नाया मपत-भूमेरुच्चप्रदेशे म-स्थाने स्थितस्य हस्तशतोच्छ्रितस्य मअ-वृक्षस्य मूलं म, अग्रम् = अ । वृक्षमूलप्रदेशात् प-स्थाने हस्तशतद्वयान्तरे काचिद्वापी । अ-अग्रस्थानस्थयोर्वानरयोरेकतरो वृक्षादवतीर्य प्रवणभूम्याश्रयत एव वापीं गतः । अन्यतरश्च किञ्चिदुड्डीय कर्णगत्या तां वापीं गतः । द्वयोर्वानरयोर्गती यदि समाने कल्प्येते तदोड्डीनमानं कियदिति प्रश्नः । अम = अ, मप = क, अउ = य प्रश्नानुसारतः अम + मप = पउ + अउ $\therefore$ पउ = मप + अम − अउ । प्रावण्यकोणः $\angle$मपत $= २०^\circ =$ आ $\therefore$ $\angle$पमत $= ९० -$ आ $= ७०^\circ$

$\therefore \angle$पमउ $= १८०^\circ - (९०^\circ -$ आ$) = ९०^\circ +$ आ

अथ (२८)प्रक्रमतः कोज्या $\angle$पमउ = ज्याआ $= \dfrac{\text{पउ}^२ - \text{पम}^२ - \text{मउ}^२}{२\text{पम}.\text{मउ}}$

$\therefore$ पउ^२ = मप^२ + मउ^२ + २ज्याआ.मप.मउ । किन्तु

पउ = मप + अम − अउ $\therefore$ पउ^२ = (मप + अम − अउ)^२

$= मप^{२} + अम^{२} + अउ^{२} + २पम.अम - २पम.अउ - २अम.अउ$

$= मप^{२} + मउ^{२} + २ज्याआ.मप.मउ$

$= मप^{२} + (अउ + अम)^{२} + २ज्याआ.मप(अउ + अम)$

$= मप^{२} + अउ^{२} + अम^{२} + २अउ.अम + २ज्याआ.मप(अउ + अम)$

$\therefore$ २मप.अम − २मप.अउ − २अम.अउ

= २अउ.अम + २ज्याआ.मप(अउ + अम)

= २अउ.अम + २ज्याआ.मप.अउ + २ज्याआ.मप.अम

$\therefore$ २पम.अम − २ज्याआ.मप.अम

= २अउ.अम + २पम.अउ + २अम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ

= ४अउ.अम + २पम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ ।

२अम(मप − ज्याआ.मप)

= अउ(४अम + २मप + २ज्याआ.मप)

= २अम.मप(१ − ज्याआ)

= अउ { ४अम + २मप(१ + ज्याआ) }

$\therefore$ अउ = उड्डीनमानम् $= \frac{\text{अम.मप(१ − ज्याआ)}}{\text{२अम + मप(१ + ज्याआ)}}$

$= \frac{\text{अ.क(१ − ज्याआ)}}{\text{२अ + क(१ + ज्याआ)}}$

अस्य गणितम् ।

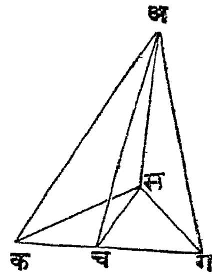
उड्डीनमानम् = अउ = य $= \frac{\text{अ.क(१−ज्याआ)}}{\text{२अ + क(१ + ज्याआ)}}$

$= \frac{१०० \times २०० \; (१ - \cdot३४२०२०१)}{२ \times १०० + २०० \; (१ + \cdot३४२०२०१)}$

$= \frac{२०००० \; (\cdot६५७९७९९)}{२०० + २०० + २०० \; (\cdot३४२०२०१)} = \frac{१३१\cdot५९५९८००}{४\cdot६८४०४०२}$

$= २८\cdot०९४५४५$ ।

(१९) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते कग = सरलप्रदेशः = अ, मअ = वंशः, यस्य मूलबिन्दुः = म, अग्रबिन्दुः = अ, कग-प्रदेशस्य मध्यप्रदेशः = च-बिन्दुः । ∠मकअ = ∠मगअ = आ । ∠मचअ = का, ∠कमअ = ∠गमअ = ∠चमअ = ९०°, सरलभूमितलोपरि वंशस्य लम्बरूपत्वात् ।

मअ = वंशः = या ।

$\therefore \dfrac{\text{या.कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}}$ = कम, कमग-त्रिभुजस्य समद्विबाहुकत्वात्

सरलप्रदेशार्धबिन्दुतो वंशमूलपर्यन्तं चमू-रेखा कग-रेखोपरि लम्बरूपा

$\therefore \text{चम}^2 = \text{कम}^2 - \left(\dfrac{\text{कग}}{२}\right)^2 = \dfrac{\text{या}^2.\ \text{कोज्या}^2\text{आ}}{\text{ज्या}^2\text{आ}} - \dfrac{\text{कग}^2}{४}$

$= \dfrac{\text{या}^2.\ \text{कोज्या}^2\text{आ} \times ४ - \text{ज्या}^2\text{आ}.\ \text{कग-}}{४\text{ज्या}^2\text{आ}}$ । अमच-त्रिभुजे

$\text{चम} = \dfrac{\text{या} \times \text{कोज्याका}}{\text{ज्याका}}$ $\therefore \text{चम}^2 = \dfrac{\text{या}^2 \times \text{कोज्या}^2\text{का}}{\text{ज्या}^2\text{का}}$

$\therefore \dfrac{\text{या}^2.\ \text{कोज्या}^2\text{आ} \times ४ - \text{ज्या}^2\text{आ}.\ \text{कग}^2}{४\ \text{ज्या}^2\text{आ}} = \dfrac{\text{या}^2 \times \text{कोज्या}^2\text{का}}{\text{ज्या}^2\text{का}}$

$\therefore \text{या}^2.४\text{कोज्या}^2\text{आ.ज्या}^2\text{का} - \text{ज्या}^2\text{आ.ज्या}^2\text{का.कग}^2$

$= \text{या}^2 \times ४\text{ज्या}^2\text{आ.कोज्या}^2\text{का}$

$\therefore \text{या}^2.४\text{कोज्या}^2\text{आ.ज्या}^2\text{का} - \text{या}^2.४\text{ज्या}^2\text{आ.कोज्या}^2\text{का}$

$= ज्या^2 आ.ज्या^2 का.कग^2$

$= ४या^2 (कोज्या^2 आ.ज्या^2 का - ज्या^2 आ.कोज्या^2 का)$

$= ४या^2 (कोज्याआ.ज्याका + ज्याआ.कोज्याका) \times$

$(कोज्याआ.ज्याका - ज्याआ.कोज्याका)$

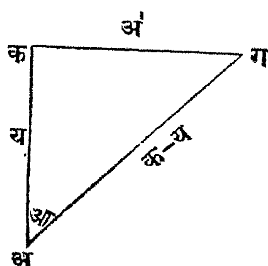
$= ४या [ज्या(आ + का)] [ज्या(आ - का)]$

$$\therefore या = \frac{\frac{कग}{२} ज्याआ.ज्याका}{\sqrt{ज्या(आ + का) ज्या(आ - का)}}$$

$$= \frac{\frac{अ}{२} ज्याआ.ज्याका}{२\sqrt{ज्या(आ + का) ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore चम = दूरत्वम् = \frac{अ.कोज्याका.ज्याआ.ज्याका}{२\sqrt{ज्या(आ + का) ज्या(आ - का)}}$$

(२०) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अ, क, ग त्रीणि स्थानानि कल्प्यन्ते । तत्र अ-स्थानात् क-स्थानं प्राच्यां वर्त्तते । अ-स्थानात् ग-स्थानं च आ-अंशान्तरे क-स्थानतो दक्षिणभागे अं-हस्तमितान्तरे तिष्ठति । ग-स्थानं प्राप्यमस्ति किन्तु क-स्थानाद् दक्षिणगमनमशक्यमतो ग-स्थानं लिप्सुर्जनः क-स्थानात् अ-स्थानं प्रत्यक् गत्वा आ-अंशान्तरेण चलितो ग-स्थानं लब्धः । अत्र

तस्य चलनप्रदेशः अक + अग = क । अक = य $\therefore$ अग = क − य ।

$$(३८\ \text{प्रक्रमतः})\ \text{कोज्याआ} = \frac{य^{२} + (क - य)^{२} - अं^{२}}{२य(य - क)}$$

$$\therefore २य(क - य)\text{कोज्याआ} = य^{२} + (क - य)^{२} - अं^{२}$$

$$\therefore अं^{२} = य^{२} + (क - य)^{२} - २य(क - य)\text{कोज्याआ}$$

$$= य^{२} + क^{२} + य^{२} - २क.य - २क.य.\text{कोज्याआ} + २य^{२}.\text{कोज्याआ}$$

$$= क^{२} + २य^{२} + २य^{२}.\text{कोज्याआ} - (२क.य + २क.य.\text{कोज्याआ})$$

$$= क^{२} + २य^{२}(१ + \text{कोज्याआ}) - २कय(१ + \text{कोज्याआ})$$

$$= क^{२} + (२य^{२} - २कय)(१ + \text{कोज्याआ})$$

$$\therefore २य^{२} - २कय = \frac{अं^{२} - क^{२}}{१ + \text{कोज्याआ}}$$

$$\therefore ४य^{२} - ४क.य + क^{२} = \frac{२अं^{२} - २क^{२} + क^{२} + क^{२}.\text{कोज्याआ}}{१ + \text{कोज्याआ}}$$

$$= \frac{२अं^{२} - क^{२} + क^{२}.\text{कोज्याआ}}{१ + \text{कोज्याआ}} = \frac{२अं^{२} - क^{२}(१ - \text{कोज्याआ})}{१ + \text{कोज्याआ}}$$

अत्र $१ + \text{कोज्याआ} = २\text{कोज्या}^{२}\tfrac{१}{२}\text{आ}$

$$\therefore २य - क = \frac{\sqrt{२अं^{२} - क^{२}\tfrac{१}{२}\text{उआ}}}{\text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ}}$$

$$\therefore य = \tfrac{१}{२}क \pm \frac{\sqrt{अं^{२} - क^{२}.\tfrac{१}{२}\text{उआ}}}{२\text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ}}$$

एतदेव क-स्थानात् अ-स्थानस्यान्तरम् ।

$$\therefore क - य = \tfrac{१}{२}क \mp \frac{\sqrt{अं^{२} - क^{२}.\tfrac{१}{२}\text{उआ}}}{२\text{कोज्या}\tfrac{१}{२}\text{आ}}$$

एतत् अ-स्थानात् ग-स्थानस्यान्तरम् ।

॥ इति ॥

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्—

हरिकृष्णदास, मालिक

गुप्तबुक्डीपो, कचौरी गली

बनारस सिटी।

Printed at the Art Printing Works by Ganga Prasad Gupta,
the Chandraprabha Press by Gauri Shankar Lal and
Sri Lakshmi Narayan Press by G. K. Gurjar.